Своеобразное решение своеобразной задачи

Сохранение энергии:

$$\Pi_0 + K_0 = \Pi + K\,,$$

$$-mgL + \frac{mV_0^2}{2} = -mg\left(L - \Delta y\right) + \frac{mV^2}{2}\,,$$

где

$\Delta y = L\left(1 - \cos\alpha\right)$ – подъём шарика при движении по окружности;

V – текущая скорость шарика (абсолютная);

угол α отсчитывается от начального положения шарика.

Знак «–» у потенциальной энергии из-за того, что нулевой уровень потенциала тяжести выбран в точке подвеса.

Тогда

$$-mgL + \frac{mV_0^2}{2} = -mgL \cdot \cos\alpha + \frac{mV^2}{2}$$

или

$$-2gL + V_0^2 = -2gL \cdot \cos\alpha + V^2\,.$$

Откуда

$$V = \sqrt{V_0^2 - 2gL\left(1 - \cos\alpha\right)}\,.$$

Уравнение динамики:

$$-F_n + T - mg\cos\alpha = 0\,.$$

Откуда

$$T = mg\cos\alpha - F_n = mg\cos\alpha + m\frac{V^2}{L}\,.$$

При $T = \min = 0$ (иначе задачу можно решить только численно)

$$\frac{V^2}{L} = -g\cos\alpha_{кр}\,.$$

где $\alpha_{кр}$ – угол, при котором траектория шарика перестаёт быть круговой, и он начинает свободно падать (как брошенное тело).

Отсюда

$$\cos\alpha_{кр} = -\frac{V^2}{gL} = \frac{-V_0^2 + 2gL\left(1 - \cos\alpha_{кр}\right)}{gL}\,.$$

Тогда

$$3gL\cos\alpha_{кр} = 2gL - V_0^2$$

и

$$\alpha_{кр} = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{V_0^2}{3gL}\right).$$

Отсюда ограничения (с учетом того, что в нижней части $T \neq 0$ всегда, т.к. она всегда противоположно направлена с силой тяжести, поэтому возможные значения α ограничены промежутком $(90°;180°)$):

$$-1 < \frac{2}{3} - \frac{V_0^2}{3gL} < 0$$

$$\begin{cases} V_0 > \sqrt{2gL} \\ V_0 < \sqrt{5gL} \end{cases}$$

При таких значения V_0 достигается возможность $T = 0$ Н на траектории, т.е. шарик начинает падать.

Вне этого промежутка V_0 невозможно достичь такого:

при $V_0 < \sqrt{2gL}$ – шарик, как маятник (не обязательно, как математический), колеблется в нижней части;

при $V_0 > \sqrt{5gL}$ – шарик будет вращаться вокруг точки подвеса (круговая траектория).

Угол, при котором $T = 0$ определяется по формуле

$$\alpha_{кр} = \arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{V_0^2}{3gL}\right).$$

Для построения траектории движения шарика в координатах xOy достаточно знания угла $\alpha_{кр}$, когда реакция нити $T = 0$: до достижения этого угла траектория – окружность, после достижения $\alpha_{кр}$ – траекторию можно построить как траекторию свободно брошенного тела с начальной скорость такой, какая была достигнута в момент достижения угла $\alpha_{кр}$ (по закону сохранения энергии).

Такое решение будет справедливо до тех пор, пока падающий шарик не растянет полностью нить. После этого для нити следует ударное явление с совершенно другим решением.