Практическая работа №1

**«Матрицы и действия с матрицами. Решение систем линейных уравнений»**

**Цель:** научиться выполнять действия над матрицами, вычислять определители второго и третьего порядка, находить обратную матрицу.

**Теоретическая часть**

**Линейные матричные операции**

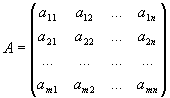
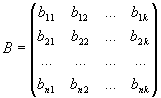
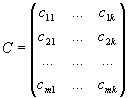
1. По определению, чтобы *умножить матрицу на число*, нужно умножить на это число все элементы матрицы.
2. *Суммой двух матриц* одинаковой размерности, называется матрица той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов слагаемых.

**ПРИМЕР 1.**Сложить матрицы А и В[math](http://images.wikia.com/wikitex/images/4/4d/4d4/ca527a875d45c0af80ea73d1951671.png)

**ПРИМЕР 2.**Выполнить вычитание матриц А и В[math](http://images.wikia.com/wikitex/images/f/ff/ffd/842954ad651d4fb0aedb215946aa31.png)

1. *Произведение матриц* определяется следующим образом. Пусть заданы две матрицы *A* и *B*, причем число столбцов первой из них равно числу строк второй.

*Произведением матрицA* и *B*, называется матрица С

, ,  ,

Элементы, которой вычисляются по формуле *cij =ai1b 1j + ai2b 2j + ... +ainbnj ,*

*i=1, ..,m, j=1, ..., k.*

Произведение матриц *A* и *B* обозначается *AB*, т.е. *C=AB*.

**ПРИМЕР 3**. Доказать, что произведение АВВА.



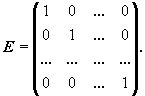
[math](http://images.wikia.com/wikitex/images/b/b7/b7f/4703a3b570b01c4a1a89bd2a313b61.png)

[math](http://images.wikia.com/wikitex/images/2/25/25b/61340ceb8132e87e99e6c7a09fa4f1.png)

Произведениематриц, вообще говоря, зависит от порядка сомножителей.

Если *AB=BA*, то матрицы *A* и *B* называются *перестановочными*.

 Для квадратных матриц определена *единичная матрица* - квадратная матрица, все диагональные элементы которой единицы, а остальные - нули:



Единичная матрица чаще всего обозначается буквой *E* или *E n*, где *n* - порядок матрицы. Непосредственным вычислением легко проверить основное *свойство* единичной матрицы:

*AE=EA=A*.

*Скалярной матрицей* называется диагональная матрица с одинаковыми числами на главной диагонали; единичная матрица - частный случай скалярной матрицы.

**[ПРИМЕР](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme1/example.asp" \l "ex3)4.** Умножение матрицы на матрицы специального вида

, но ВА не определено, поскольку число столбцов в матрице В не равно числу строк в матрице А.

б) .

**[ПРИМЕР](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme1/example.asp" \l "ex3) 5.** Вычислить значение многочлена от матрицы А:

f(x) = ; A= ; f(A) = ?

Решение: Будем делать вычисления по действиям.

1.  Найдём А2:

 =, итак получаем А2=.

2.  = .

3.  –2А = .

4.  += 

 .

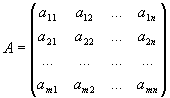
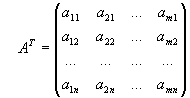
5.  +=+

.

Ответ: f(A) = 

1. Для квадратных матриц определена операция *возведения в целую неотрицательную степень*: *A 0 =E, A 1 =A, A 2 =AA, ...,An =An-1A, ...*.
2. Для прямоугольных матриц определена операция *транспонирования*. Рассмотрим произвольную прямоугольную матрицу *A*. Матрица, получающаяся из матрицы *A* заменой строк столбцами, называется *транспонированной* по отношению к матрице и обозначается *A T*.

Вернысоотношения:  
*(AT )T =A;  
(A+B)T=AT +BT ;  
(AB)T =BT AT.*

, .

Квадратная матрица *A*, для которой *A T =A*, называется *симметричной*. Элементы такой матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны.

1. Квадратная матрица*A* называется *обратимой*, если существует такая матрица *X*, что *AX=XA=E*. Матрица *X* называется *обратной* к матрице *A* и обозначается *A -1*, т.е. *A A -1 =A -1A=E*.

Известно, что если матрица *Aневырождена* (т.е. ее определитель отличен от нуля), то у нее существует обратная матрица *A -1*.

Верно соотношение: *(A-1)T =(AT ) -1.*

**Определитель матрицы и его свойства**

Пусть *A* квадратная матрица порядка *n, n>1*.*Определителем* квадратной матрицы *A* порядка *n* называется число

*i=1,2,...,n, j=1,2,...,n*.

Определитель квадратной матрицы порядка полученной из матрицы *A* вычеркиванием первой строки и *j* -го столбца, называемый *минором* элемента *a1j* .

Формула *=* +…

называется формулой вычисления определителя *разложением по первой строке*.

Пусть *Mi<j>* - определитель квадратной матрицы порядка *n-1*, полученной

матрицы *A* вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца (минор элемента *aij* ).   
Число *(-1)j+iMi<j>* называется *алгебраическим дополнением* элемента *aij* матрицы *A*.   
Справедливы формулы вычисления определителя квадратной матрицы *Aразложением по i-й строке и разложением по j-му столбцу* – формула (\*).

Для квадратной матрицы второго порядка формула вычисления определителя упрощается:

поскольку, например, в формуле разложения определителя по 1-ой строке   
*M1< 1> =a22 , M1< 2> =a21*.

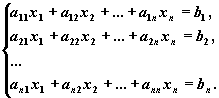
Для квадратной матрицы третьего порядка формула вычисления определителя разложением по 1-ой строке имеет вид:

.

[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme2/example.asp#ex1) **6.** Вычисление определителя разложением по 1-ой строке.

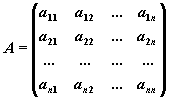
**Решение систем линейных уравнений**

Рассмотрим *систему линейных алгебраических уравнений* (СЛАУ) относительно *n* неизвестных *x1 , x2 , ..., xn*:



Эта система в "свернутом" виде может быть записана так:

В соответствии с [правилом умножения матриц](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme1/theory.asp#1) рассмотренная система линейных уравнений может быть записана в *матричной форме* *Ax=b*, где

, , .

Матрица *A*, столбцами которой являются коэффициенты при соответствующих неизвестных, а строками - коэффициенты при неизвестных в соответствующем уравнении называется *матрицей системы*. Матрица-столбец *b*, элементами которой являются правые части уравнений системы, называется матрицей правой части или просто *правой частью системы*. Матрица-столбец ***x***, элементы которой - искомые неизвестные, называется *решением системы*.

Система линейных алгебраических уравнений, записанная в виде *Ax=b*, является *матричным уравнением*.

Если матрица системы *невырождена*, то у нее существует обратная матрица и тогда решение системы *Ax=b* дается формулой: *x=A -1 b*.

[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme3/example.asp#ex1) **1**. Решение матричного уравнения:

.

Ответ: ()

Справедливо следующее утверждение (*формулы Крамера*).

Если [определитель](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme2/theory.asp) *D=det A* матрицы системы *Ax=b* отличен от нуля, то система имеет единственное решение *x1 , x2 , ..., xn*, определяемое *формулами Крамера*

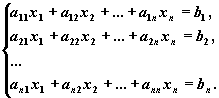
*xi =Di / D*, *i=1,2, ..., n*,

где D*i* - определитель матрицы *n* -го порядка, полученной из матрицы *A* системы заменой *i* -го столбца столбцом правых частей *b*.

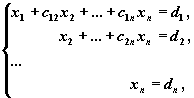
[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme3/example.asp#ex1) **2**. Вычисление решения системы линейных уравнений по формулам Крамера.

Ответ: ()

*Метод Гаусса* применим для решения системы линейных алгебраических уравнений c невырожденной матрицей системы. Идея метода Гаусса состоит в том, что систему *n* линейных алгебраических уравнений относительно *n* неизвестных *x1 , x2 , ..., xn*



приводят последовательным исключением неизвестных к эквивалентной системе с треугольной матрицей



решение которой находят по рекуррентным формулам:

*xn =dn , xi = di -*S *nk=i+1 cik xk , i=n-1, n-2, ...,1*.

[**ПРИМЕР**](http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/la/theme3/example.asp#ex1) **3**. Вычисление решения системы линейных уравнений методом Гаусса.

Ответ: ().

**Практическая часть**

**Задание 1. Найти значение матричного многочлена.**

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1.** | **Вариант 2.** |
| , если  ; | , если  ; |
| **Вариант 3.** | **Вариант 4.** |
| , если  ; | , если  ; |
| **Вариант 5.** | **Вариант 6.** |
| , если  ; | , если  ; |

**Задание 2. Вычислить определитель второго порядка.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Вариант 1.** | **Вариант 2.** | **Вариант 3.** |
|  |  |  |
| **Вариант 4.** | **Вариант 5.** | **Вариант 6.** |
|  |  |  |

**Задание 3.**Решить систему уравнений: a) методом Крамера; б) методом Гаусса.

|  |  |
| --- | --- |
| **Вариант 1** | **Вариант 4** |
| **Вариант 2** | **Вариант 5** |
| **Вариант 3** | **Вариант 6** |