

$$1 + \log_2(x+5) = \log_2(3x-1) + \log_2(x-1)$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ 3x-1 > 0 \\ x+5 > 0 \\ 1 + \log_2(x+5) = \log_2(3x-1) + \log_2(x-1) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 1 + \log_2(x+5) = \log_2(3x-1) + \log_2(x-1) \end{cases}$$

Вспользуемся свойством логарифмов.

$$1 + \log_2(x+5) = \log_2(3x-1) + \log_2(x-1)$$

$$\log_2(2) + \log_2(x+5) = \log_2(3x-1) + \log_2(x-1)$$

$$\log_2(2(x+5)) = \log_2((3x-1)(x-1))$$

$$2(x+5) = (3x-1)(x-1)$$

Следующая система эквивалентна предыдущей.

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2(x+5) = (3x-1)(x-1) \end{cases}$$

Решаем вспомогательное уравнение.

$$2(x+5) = (3x-1)(x-1)$$

$$2(x+5) - (3x-1)(x-1) = 0$$

$$6x + 9 - 3x^2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Находим дискриминант.

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{2-4}{2 \cdot 1} = -1; \quad x_2 = \frac{2+4}{2 \cdot 1} = 3$$

Ответ вспомогательного уравнения: $x = -1; x = 3$

Теперь решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1.

$$\begin{cases} x > 1 \\ x = -1 \end{cases} \text{ нет решений}$$

Случай 2.

$$\begin{cases} x > 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Окончательный ответ: $x = 3$