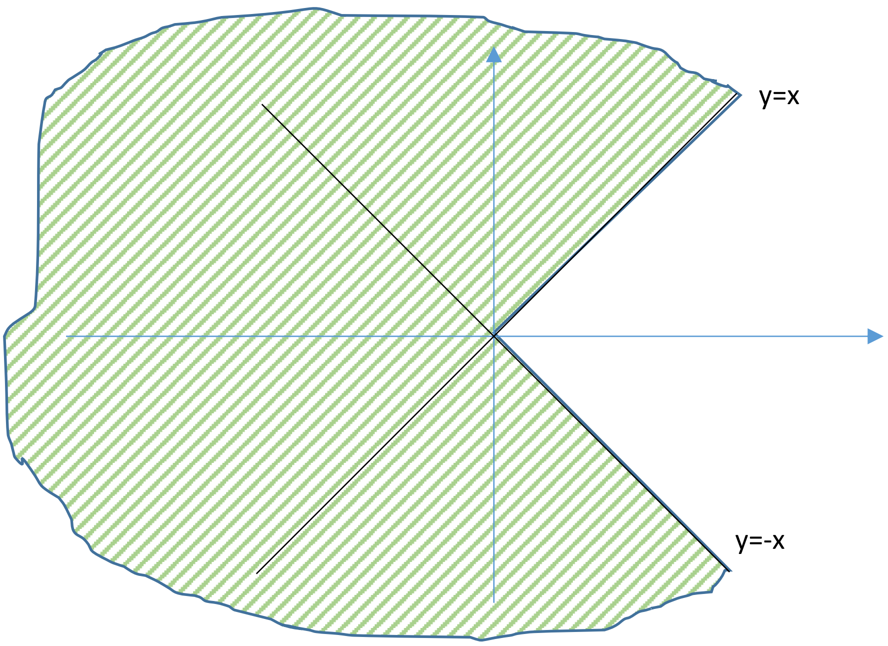
**18. При каких значениях параметра $a$ система**

$$\begin{cases} y^2 - x^2 \geqslant 0, \\ (y - a^2 - 3a + 18)^2 + (x - 6a)^2 = 3 \cdot |a|^{-\frac{a}{2}} \end{cases}$$

**имеет ровно 2 решения?**

Решение. Из первого неравенства следует, что $|y| \geq x$. Изобразим это графически

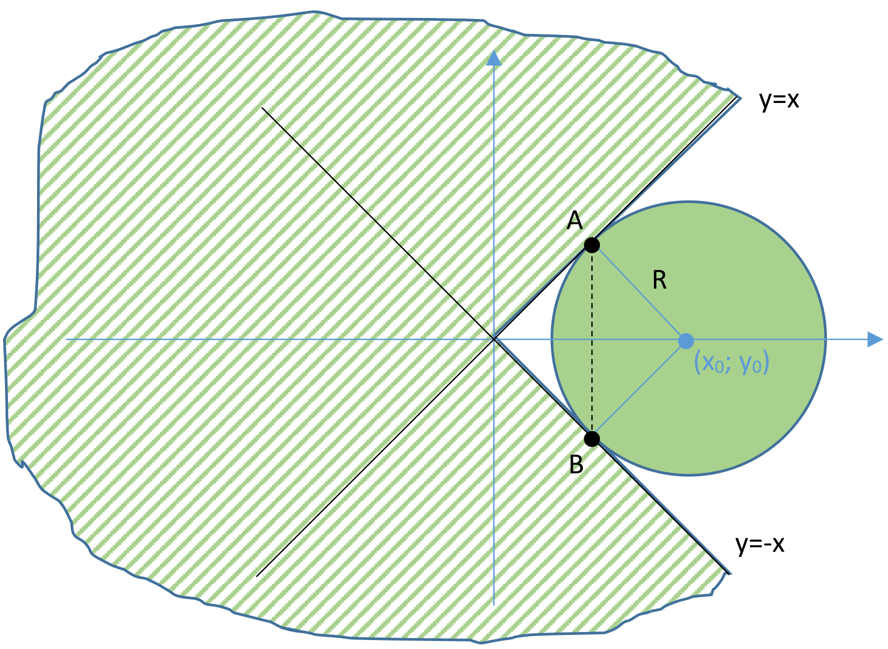



Второе уравнение имеет вид

$$(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = R^2$$

где $y_0 = a^2 + 3a - 18;\quad x_0 = 6a;\quad R^2 = 3|a|^{-\frac{a}{2}}$

Это уравнение окружности. Если система имеет ровно 2 решения, графически это означает, что имеютсля лишь две общие точки у окружности и изображенной области. Это возможно лишь когда центр окружности лежит на оси х:



Если центр окружности лежит на оси x, то его координата по y равна 0: ($x_0$; 0). Из чертежа видно, что $x_0>0$. Значит

$$y_0 = a^2 + 3a - 18 = 0$$

Решаем квадратное уравнение

$$D = 3^2 - 4(-18) = 9 + 72 = 81$$

$$a_1 = \frac{-3-\sqrt{81}}{2} = -6$$

$$a_2 = \frac{-3+\sqrt{81}}{2} = 3$$

При a=-6 условие $x_0>0$ не выволняется. Остается единственное решение a=3.

Рассмотрим точку A($x_A$; $y_A$). Из чертежа видно, что

$$x_A = R\cos 45^0 = \sqrt{3|a|^{-\frac{a}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3\cdot 3^{-\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt[4]{12}}$$

С другой стороны

$$x_A = \frac{x_0}{2} = \frac{6a}{2} = 3a = 9$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{12}} \neq 9$$

А это означает, что окружность с центром в найденной точке не проходит через т.А. Следовательно, решения нет.

Ответ: ни при каких