



а) Длина дуги находится по формуле $L = \int_0^1 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$, где $y(x) = \arcsin e^{-x}$.

$$y'(x) = (\arcsin e^{-x})' = \frac{1}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}} \cdot (e^{-x})' = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} \cdot (-x)' = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}};$$

Прошу обратить внимание на то, что при $x = 0$ $y'(x) = \frac{-e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$ обращается в бесконечность, и это предвещает большие неприятности при попытке «в лоб» использовать формулу $L = \int_0^1 \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$. И в самом деле:

$$1 + [y'(x)]^2 = 1 + \frac{(-e^{-x})^2}{1 - e^{-2x}} = \frac{1 - e^{-2x} + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1}{1 - e^{-2x}}; L = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - e^{-2x}}},$$

т.е. для определения дуги получили несобственный интеграл, т.к. при нижнем пределе интегрирования $x = 0$ подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$ обращается в

бесконечность. Что такое несобственные интегралы, и как их считать, в школе не учат. Тем не менее, на концах отрезка $[0; 1]$ функция имеет конечные значения:

$$y(0) = \arcsin e^{-0} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}; y(1) = \arcsin e^{-1} \approx 0,376728.$$

Функция $y = \arcsin e^{-x}$ непрерывна на $[0; 1]$ и имеет конечную производную во всех точках, кроме $x = 0$. Значит, длина дуги линии $y = \arcsin e^{-x}$ на $[0; 1]$ имеет конечное значение. Так как же найти эту длину? А вот как:

$y = \arcsin e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = \sin y \Leftrightarrow \ln e^{-x} = \ln \sin y \Leftrightarrow -x = \ln \sin y \Leftrightarrow x = -\ln \sin y$, т.е. переходим к обратной функции. Теперь длину дуги будем считать по формуле

$$L = \left| \int_{y(0)}^{y(1)} \sqrt{1 + [x'_y(y)]^2} dy \right|, \text{ где } x(y) = -\ln \sin y.$$

$$x'_y(y) = -\frac{1}{\sin y} \cdot (\sin y)'_y = -\frac{\cos y}{\sin y}; 1 + [x'_y(y)]^2 = 1 + \frac{\cos^2 y}{\sin^2 y} = \frac{1}{\sin^2 y} \text{ и т.к. при } 0 \leq x \leq 1$$

$$y(x) > 0, \text{ то } L = \int_{\arcsin e^{-1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sin y} \text{ (т.к. при определении длины дуги подынтегральная}$$

функция не отрицательная, то для получения не отрицательного значения интеграла нижний предел интегрирования должен быть меньше верхнего).

$\sin y = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}}$. Поэтому в интеграле $L = \int_{\arcsin e^{-1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sin y}$ используем замену $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = t$. То-

гда $\sin y = \frac{2t}{1+t^2}$; $\frac{1}{\sin y} = \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{y}{2} = \operatorname{arctgt}$, $y = 2 \operatorname{arctgt}$, $dy = \frac{2dt}{1+t^2}$ и

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(1+t^2) \cdot 2dt}{2t(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right|$. И т.к. при $\arcsin e^{-1} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{tg} \frac{y}{2} > 0$, то

$$\begin{aligned} L &= \int_{\arcsin e^{-1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sin y} = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{2} \Big|_{\arcsin e^{-1}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \operatorname{tg} \frac{\arcsin e^{-1}}{2} = \ln 1 - \ln \operatorname{tg} \frac{\arcsin e^{-1}}{2} = \\ &= -\ln \operatorname{tg} \frac{\arcsin e^{-1}}{2} \approx 1,657454. \end{aligned}$$

Приближённые значения $\arcsin e^{-1} \approx 0,376728$ и $-\ln \operatorname{tg} \frac{\arcsin e^{-1}}{2} \approx -1,657454$ найдены в MS Excel.

б) $x = e^t (\cos t + \sin t)$, $y = e^t (\cos t - \sin t)$, $0 \leq t \leq 1$.

В этом случае длина дуги находится по формуле $L = \int_0^1 \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$.

$$x'_t = e^t (\cos t + \sin t) + e^t (-\sin t + \cos t) = 2e^t \cos t;$$

$$y'_t = e^t (\cos t - \sin t) + e^t (-\sin t - \cos t) = -2e^t \sin t;$$

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = 4e^{2t} \cos^2 t + 4e^{2t} \sin^2 t = 4e^{2t};$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{4e^{2t}} dt = \int_0^1 2e^t dt = 2e^t \Big|_0^1 = 2e - 2.$$