Решить нелинейное уравнение с точностью до 0,01: методом половинного деления x3 -4x-5=0 и методом хорд

РЕШЕНИЕ

Метод вилки.

Решаем уравнение

$$f(x)=x^3-4x-5=0$$

Вначале нужно определиться с отрезком на котором будем искать корни.

Пусть $a=2,\ b=3$

$$f(a)=2^3-4\cdot 2-5=-5<0$$

$$f(b)=3^3-4\cdot 3-5=-5>0$$

На концах отрезка $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет разные знаки значит он содержит как минимум один корень.

Оценим погрешность. Погрешность на k-м шаге будет в общем

$$\varepsilon\leq\frac{|a-b|}{2^k}$$

В нашем случае

$$\varepsilon\leq\frac{1}{2^k}$$

Находим требуемое количество шагов для этого решаем неравенство

$$\frac{1}{2^k}\leq 0{,}01$$

$$100\leq 2^k$$

Логарифмируем по основанию 2.

$$\log_2(100)\leq k$$

$$k\geq\log_2(100)=\frac{\ln(100)}{\ln(2)}\approx 6{,}64$$

Округляем в большую сторону

Т.е. до 0,01 нам надо сделать k=7 шагов.

Шаг 1.

Делим $[a;b]$ пополам, проверяем $f(x)$ в середине отрезка.

$x_1=\frac{a+b}{2}=2{,}5$

$f(x_1)=0{,}625>0$

Погрешность $\varepsilon\le|b-a|/2=|3-2|/2=0{,}5$

Шаг 2.

Выбираем из двух половинок ту, на концах которой $f(x)$ имеет разные знаки

Теперь $b:=x_1=2{,}5$ оставляем $a=2$

Снова делим $[a;b]$ пополам

$x_2=\frac{a+b}{2}=2{,}25$

$f(x_2)=-2{,}6094<0$

Погрешность $\varepsilon\le|b-a|/2=|2{,}5-2|/2=0{,}25$.

Шаг 3.

Выбираем из двух половинок ту, на концах которой $f(x)$ имеет разные знаки

Теперь $a:=x_2=2{,}25$ оставляем $b=2{,}5$

Снова делим $[a;b]$ пополам

$x_3=\frac{a+b}{2}=2{,}375$

$f(x_3)=-1{,}1035<0$

Погрешность $\varepsilon\le|b-a|/2=|2{,}5-2{,}25|/2=0{,}125$

Шаг 4.

Выбираем из двух половинок ту, на концах которой $f(x)$ имеет разные знаки

Теперь $a := x_3 = 2{,}375$ оставляем $b = 2{,}5$

Снова делим $[a;b]$ пополам

$x_4 = \dfrac{a+b}{2} = 2{,}4375$

$f(x_4) = -0{,}26782 < 0$

Погрешность $\varepsilon \le |b-a|/2 = |2{,}5 - 2{,}375|/2 = 0{,}0625$

Шаг 5.

Выбираем из двух половинок ту, на концах которой $f(x)$ имеет разные знаки

Теперь $a := x_4 = 2{,}4375$ оставляем $b = 2{,}5$

Снова делим $[a;b]$ пополам

$x_5 = \dfrac{a+b}{2} = 2{,}46875$

$f(x_5) = 0{,}17136 > 0$

Погрешность $\varepsilon \le 1/2^5 = 0{,}03125$

Шаг 6.

Выбираем из двух половинок ту, на концах которой $f(x)$ имеет разные знаки

Теперь $b := x_5 = 2{,}469$ оставляем $a = 2{,}4375$

Снова делим $[a;b]$ пополам

$x_6 = \dfrac{a+b}{2} = 2{,}45325$

$f(x_6) = -0{,}04827 < 0$

Погрешность $\varepsilon \le 1/2^6 \approx 0{,}0156$

Шаг 7.

Выбираем из двух половинок ту, на концах которой $f(x)$ имеет разные знаки

Теперь $a := x_6 = 2{,}453$ оставляем $b = 2{,}469$

Снова делим $[a; b]$ пополам

$$x_7 = \frac{a+b}{2} = 2{,}461$$

$$f(x_7) = 0{,}06110 > 0$$

Погрешность $\varepsilon \leq 1/2^7 \approx 0{,}0078$

Ответ: один из корней $x \approx 2{,}461$