Задана пирамида с вершинами A(-2, 1, -1), B(-3, 1, 3), C(-4, 2, -1), D(-2, 3, 1)

1. Нахождение длин ребер

Вектор АВ={xB-xA, yB-yA, zB-zA}={-1, 0, 4}  
Длина ребра АВ=4.123105625617661  
  
Вектор BC={xC-xB, yC-yB, zC-zB}={-1, 1, -4}  
Длина ребра ВC=4.242640687119285  
  
Вектор АC={xC-xA, yC-yA, zC-zA}={-2, 1, 0}  
Длина ребра АC=2.23606797749979  
  
Вектор АD={xD-xA, yD-yA, zD-zA}={0, 2, 2}  
Длина ребра АD=2.8284271247461903  
  
Вектор BD={xD-xB, yD-yB, zD-zB}={1, 2, -2}  
Длина ребра BD=3  
  
Вектор CD={xD-xC, yD-yC, zD-zC}={2, 1, 2}  
Длина ребра CD=3

2. Площади граней

Площадь грани АВС может быть найдена как половина площади параллелограмма построенного на векторах АВ и АС.  
Площадь этого параллелограмма равна модулю векторного произведения векторов АВ и АС  
  
[AB{x1, y1, z1} ; AC(x2, y2, z2}]= {a1, a2, a3}, где a1, a2, a3 вычисляются по формулам:  
a1=y1\*z2-y2\*z1; a2=x1\*z2-x2\*z1; a3=x1\*y2-y1\*x2;   
Получаем: [AB ; AC]={-4, -8, -1}  
  
Площадь грани АВС = 4.5  
  
Аналогично:  
Площадь грани АВD = 4.242640687119285  
Площадь грани АСD = 3  
Площадь грани BCD = 4.5

3. Объем пирамиды

Для нахождения объема пирамиды надо найти объем параллелепипеда, построенного на гранях АВ, АС и АD и поделить его на 6  
Объем этого параллелепипеда равен модулю векторного произведения вектров AB, AC и AD  
(AB{x1, y1, z1} ; AC(x2, y2, z2} ; AD{x3, y3, z3})= x3\*a1+y3\*a2+z3\*a3  
Объем пирамиды равен: 3

4. Длины высот пирамиды

Чтобы найти длину высоты, опущенной, допустим, на грань АВС, надо использовать формулу объема пирамиды, известную из геометрии: V=1/3\*Sосн\*H  
В этой формуле нам известны и объем и площадь соответствующей грани. Высота может быть расчитана по формуле: H=3V/Sосн  
Высота, опущенная на грань ABC равна: 2  
Высота, опущенная на грань ABD равна: 2.121320343559643  
Высота, опущенная на грань ACD равна: 3  
Высота, опущенная на грань BCD равна: 2

5. Угол между ребрами BD и BC

Угол между ребрами ищется как угол между соответствующими векторами - с использованием скалярного произведения.  
BC{x4, y4, z4}\*BD{x5, y5, z5}=x4\*x5+y4\*y5+z4\*z5=|BC|\*|BD|\*cos(alfa)  
Получаем: 9=12.727922061357855cos(alfa)  
Откуда: cos(alfa)=0.7071067811865476  
Угол между BD и BC равен 45 градусов  
sin(BD,BC)=0.7071067811865475  
  
Аналогично:  
Угол между AB и AC равен 77.47119229084849 градусов; sin(AB,AC)=0.9761870601839527  
Угол между AB и AD равен 46.68614334171696 градусов; sin(AB,AD)=0.727606875108999

6. Угол между ребром AD и гранью ABC

Угол между ребром гранью будет равен 90 градусов минус угол между гранью и нормалью к плоскости.  
Нормаль к плоскости ABC уже была найдена в пункте 2 как векторное произведение  
[AB ; AC]={a1, a2, a3}  
[AB ; AC]={-4, -8, -1}  
Используя скалярное произведение, получаем:   
AD{0, 2, 2}\*N{-4, -8, -1}=|AD|\*|N|\*cos(beta)  
Получаем: -18=25.455844122715714cos(beta)  
Откуда: cos(beta)=-0.7071067811865475  
Угол между ребром AD и гранью ABC равен 45 градусов, синус этого угла равен 0.7071067811865475

7. Угол между гранями BDC и ABC

Угол между гранями равен углу между нормалями к этим граням  
Нормаль к грани ABC уже найдена: N={-4, -8, -1}  
Нормаль к грани BDC ищется как векторное произведение вектров BD и BC  
[BD{x4, y4, z4} ; BC{x5, y5, z5}] = {n1, n2, n3}  
n1=y4\*z5-y5\*z4; n2=-x4\*z5+x5\*z4; n3=x4\*y5-y4\*x5  
[BD ; BC] = {6, -6, -3}  
Используя скалярное произведение, получаем:   
N{-4, -8, -1}\*N2{6, -6, -3}=|N|\*|N1|\*cos(gamma)  
Получаем: 27=81cos(gamma)  
Откуда: cos(gamma)=0.3333333333333333  
Угол между гранями BDC и ABC равен 70.52877936550931 градусов, синус этого угла равен 0.9428090415820634