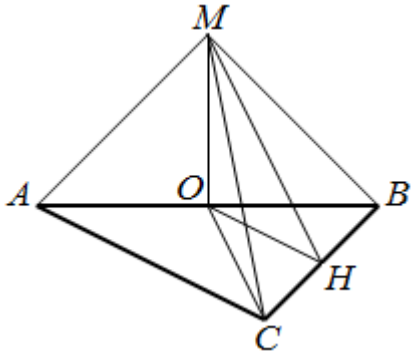
Точка M равноудалена от всех вершин равнобедренного прямоугольного треугольника ACB (угол C=90 градусов) AC= BC= 4 см. Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно $2\sqrt{3}$ см.

1) Докажите что плоскость AMB перпендикулярна плоскости ABC;

2) Какой угол BMC составляет с плоскостью ABC?

3) Найдите угол между MC и плоскостью ABC.



1) $MA = MB = MC$. O – проекция точки M на плоскость ABC. Тогда OA, OB и OC – проекции MA, MB и MC на плоскость ABC соответственно. Т.к. наклонные равны, то равны и их проекции: $OA = OB = OC$, и поэтому OA, OB и OC – радиусы окружности с центром в точке O, описанной около треугольника ABC, а центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника – это середина гипотенузы, т.е. O – середина AB. $O \in AB \cap AB \subset AMB \Rightarrow O \in AMB$.

$M \in AMB \cap O \in AMB \Rightarrow MO \subset AMB$, но $MO \perp ABC$, и по признаку перпендикулярности двух плоскостей $AMB \perp ABC$.

2) На стороне BC возьмём точку H – середину BC. MH – медиана треугольника BMC. Т.к. ΔBMC – равнобедренный $(MB = MC)$, то $MH \perp BC$. OH – медиана треугольника BOC. Т.к. ΔBOC – равнобедренный $(OB = OC)$, то $MH \perp BC$. Поэтому угол между BMC и ABC – это $\angle OHM$. O – середина AB, H – середина BC, поэтому OH – средняя линия треугольника ABC: $OH = \frac{1}{2}AC = 2$ см.

$$MO \perp ABC \Rightarrow MO \perp OH \Rightarrow \operatorname{tg}(\angle OHM) = \frac{MO}{OH} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle OHM = 60^\circ.$$

3) Угол между прямой и плоскостью – это угол между самой прямой и ей проекцией на данную плоскость, т.е. угол между MC и плоскостью ABC это $\angle OCM$.

$OC = \frac{1}{2}AB$ как медиана к гипотенузе. $AB = AC\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ см, как гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника, значит $OC = 2\sqrt{2}$ см.

$$\operatorname{tg}(\angle OCM) = \frac{MO}{OC} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \angle OHM = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$