$$x^4+2x^3-22x^2+2x+1=0$$

$$\left(x^4+1\right)+\left(2x^3+2x\right)-22x^2=0$$

$$\left(x^4+1\right)+(2x)\left(x^2+1\right)-22x^2=0$$

$$\left(x^4+2x^2+1-2x^2\right)+(2x)\left(x^2+1\right)-22x^2=0$$

$$\left(\left(x^2+1\right)^2-2x^2\right)+(2x)\left(x^2+1\right)-22x^2=0$$

$$\left(x^2+1\right)^2-2x^2+(2x)\left(x^2+1\right)-22x^2=0$$

$$\left(x^2+1\right)^2+(2x)\left(x^2+1\right)+(-22-2)x^2=0$$

$$\left(x^2+1\right)^2+(2x)\left(x^2+1\right)-24x^2=0$$

$$\left(x^2+1\right)^2:x^2+2\left(x^2+1\right):x-24=0$$

Произведем замену переменных.

Пусть $t=\left(x^2+1\right):x$

В результате .

$$t^2+2t-24=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 1(-24)=100$$

$$t_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$t_1=\frac{-2-10}{2\cdot 1}=-6$;$t_2=\frac{-2+10}{2\cdot 1}=4$

исходное уравнение сводится к уравнению

$\left(x^2+1\right):x=-6$;$\left(x^2+1\right):x=4$

решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1 .

$$\left(x^2+1\right):x=-6$$

$$\left(x^2+1\right):x+6=0$$

$$\frac{x^2+1}{x}+6=0$$

$$6+\frac{x^2+1}{x}=0$$

$$\frac{6x}{x}+\frac{x^2+1}{x}=0$$

$$\frac{6x+\left(x^2+1\right)}{x}=0$$

$$\frac{6x+x^2+1}{x}=0$$

$$\frac{x^2+6x+1}{x}=0$$

$$x^2+6x+1=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=6^2-4\cdot 1\cdot 1=32$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-6-4\sqrt{2}}{2\cdot 1}=-3-2\sqrt{2}\ ;x_2=\frac{-6+4\sqrt{2}}{2\cdot 1}=-3+2\sqrt{2}$$

Случай 2 .

$$\left(x^2+1\right):x=4$$

$$\left(x^2+1\right):x-4=0$$

$$\frac{x^2+1}{x}-4=0$$

$$-4+\frac{x^2+1}{x}=0$$

$$-\frac{4x}{x}+\frac{x^2+1}{x}=0$$

$$\frac{-4x+\left(x^2+1\right)}{x}=0$$

$$\frac{-4x+x^2+1}{x}=0$$

$$\frac{x^2-4x+1}{x}=0$$

$$x^2-4x+1=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 1=12$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$x_1=\frac{4-2\sqrt{3}}{2\cdot 1}=2-\sqrt{3}$; $x_2=\frac{4+2\sqrt{3}}{2\cdot 1}=2+\sqrt{3}$

ответ: $x=-3-2\sqrt{2}; x=-3+2\sqrt{2}; x=2-\sqrt{3}; x=2+\sqrt{3}$.