

Задача. В основании прямого параллелепипеда лежит ромб, меньшая диагональ которого равна d , большая диагональ параллелепипеда равна $2d$ и образует угол α с основанием параллелепипеда. Найдите:

- 1) длину бокового ребра;
- 2) большую диагональ основания;
- 3) площадь основания параллелепипеда;
- 4) длину стороны основания;
- 5) площадь боковой поверхности параллелепипеда;
- 6) угол наклона меньшей диагонали параллелепипеда к плоскости основания.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – прямой параллелепипед;
 $ABCD$ – ромб; $BD = d$; $A_1 C = 2d$; $\angle A C A_1 = \alpha$.

Найти: 1) AA_1 ; 2) AC ; 3) $S_{\text{осн}}$; 4) AD ; 5) S_6 ; 6) β .

Решение. Прямой параллелепипед – это параллелепипед, в основании которого параллелограмм (ромб), у которого 4 боковые грани – прямоугольники.

Так как параллелепипед прямой, то $AA_1 \perp (ABC)$, отсюда $AA_1 \perp AC$. Аналогично $BB_1 \perp (ABC) \Rightarrow BB_1 \perp BD$.

Из $\triangle A_1 AC$ ($\angle A_1 AC = 90^\circ$):

$$1) \sin \alpha = \frac{AA_1}{A_1 C} = \frac{AA_1}{2d} \Rightarrow AA_1 = 2d \sin \alpha.$$

$$2) \cos \alpha = \frac{AC}{A_1 C} = \frac{AC}{2d} \Rightarrow AC = 2d \cos \alpha.$$

$$3) \text{ Площадь ромба рассчитывается по формуле } S = \frac{1}{2} d_1 d_2, \text{ поэтому } S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \\ = \frac{1}{2} \cdot 2d \cos \alpha \cdot d = d^2 \cos \alpha.$$

4) O – точка пересечения диагоналей ромба.

$$AO = \frac{AC}{2} = \frac{2d \cos \alpha}{2} = d \cos \alpha.$$

$$OD = \frac{BD}{2} = \frac{d}{2}.$$

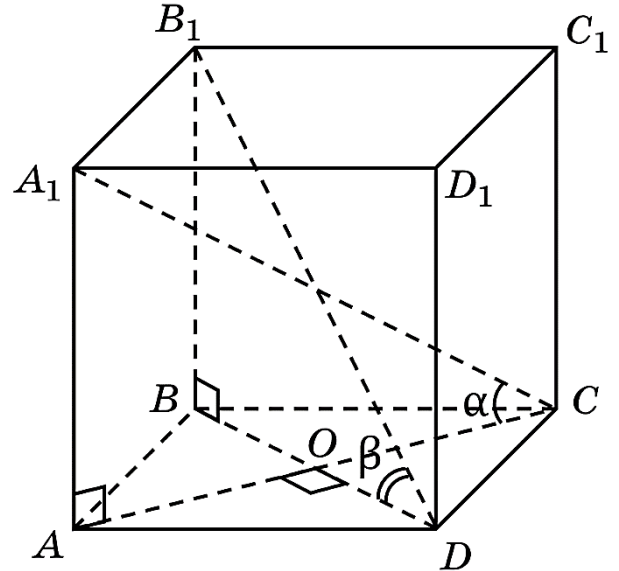
Из $\triangle AOD$ ($\angle AOD = 90^\circ$):

$$\text{по теореме Пифагора: } AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{(d \cos \alpha)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{d^2 \cos^2 \alpha + \frac{d^2}{4}} = \\ = \sqrt{\frac{d^2 \cos^2 \alpha + d^2}{4}} = \sqrt{\frac{d^2 (\cos^2 \alpha + 1)}{4}} = \frac{d \sqrt{\cos^2 \alpha + 1}}{2}.$$

$$5) S_6 = P_{\text{осн}} \cdot h = 4 \cdot AD \cdot AA_1 = 4 \cdot \frac{d \sqrt{\cos^2 \alpha + 1}}{2} \cdot 2d \sin \alpha = 4d^2 \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + 1}.$$

6) Из $\triangle B_1 BD$ ($\angle B_1 BD = 90^\circ$):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BB_1}{BD} = \frac{2d \sin \alpha}{d} = 2 \sin \alpha.$$



Ответ: 1) $2d \sin \alpha$; 2) $2d \cos \alpha$; 3) $d^2 \cos \alpha$; 4) $\frac{d \sqrt{\cos^2 \alpha + 1}}{2}$; 5) $4d^2 \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha + 1}$; 6) $2 \sin \alpha$.