$$a + \frac{1}{a} = 3$$

приведем a и $\frac{1}{a}$ к общему знаменателю (то что снизу)

$$\frac{a}{1} + \frac{1}{a} = 3$$

$$\frac{a^2}{a} + \frac{1}{a} = 3$$

$$\frac{a^2+1}{a} = \frac{3}{1}$$

перемножаем «крест-на-крест»

$$a^2 + 1 = 3a$$

$$a^2 - 3a + 1 = 0$$

решаем

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 9 - 4 = 5$$

$$a_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

тогда

$$a_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \qquad a_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

подставляем в $\left(a^5 + \left(\frac{1}{a}\right)^5\right)$:

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + \left(1 : \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^5$$

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^5$$

у $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$ избавимся от ирациональности в знаменателе

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot \left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right) \cdot \left(3-\sqrt{5}\right)} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(3-\sqrt{5}\right)}{3^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{2 \cdot \left(3-\sqrt{5}\right)}{9-5} = \frac{2 \cdot \left(3-\sqrt{5}\right)}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

возвращаемся обратно

$$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^5+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^5$$

$$\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^5}{2^5}+\frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^5}{2^5}$$

$$\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^5+\left(3-\sqrt{5}\right)^5}{2^5}$$

$$\frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^5+\left(3-\sqrt{5}\right)^5}{32}$$

отдельно считаем $\left(3+\sqrt{5}\right)^5$

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^5=\left(3+\sqrt{5}\right)^3\cdot\left(3+\sqrt{5}\right)^2$$

есть две формулы

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

тогда

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^3=3^3+3\cdot 3^2\sqrt{5}+3\cdot 3\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^3=$$

$$=27+27\sqrt{5}+9\cdot 5+5\sqrt{5}=27+32\sqrt{5}+45$$

$$=72+32\sqrt{5}$$

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^2=3^2+2\cdot 3\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2=$$

$$=9+6\sqrt{5}+5=14+6\sqrt{5}$$

$$\left(3+\sqrt{5}\right)^5=\left(72+32\sqrt{5}\right)\cdot\left(14+6\sqrt{5}\right)=$$

$$=72\cdot 14+72\cdot 6\sqrt{5}+14\cdot 32\sqrt{5}+6\sqrt{5}\cdot 32\sqrt{5}=$$

$$=1008+432\sqrt{5}+448\sqrt{5}+960=1968+880\sqrt{5}$$

тоже самое для $\left(3-\sqrt{5}\right)^5$

$$\left(3-\sqrt{5}\right)^3=3^3-3\cdot 3^2\sqrt{5}+3\cdot 3\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^3=$$

$$= 27 - 27\sqrt{5} + 9 \cdot 5 - 5\sqrt{5} = 27 - 32\sqrt{5} + 45$$

$$= 72 - 32\sqrt{5}$$

$$\left(3 - \sqrt{5}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 =$$

$$= 9 - 6\sqrt{5} + 5 = 14 - 6\sqrt{5}$$

$$\left(3 - \sqrt{5}\right)^5 = \left(72 - 32\sqrt{5}\right) \cdot \left(14 - 6\sqrt{5}\right) =$$

$$= 72 \cdot 14 - 72 \cdot 6\sqrt{5} - 14 \cdot 32\sqrt{5} + 6\sqrt{5} \cdot 32\sqrt{5} =$$

$$= 1008 - 432\sqrt{5} - 448\sqrt{5} + 960 = 1968 - 880\sqrt{5}$$

в итоге

$$\frac{\left(3 + \sqrt{5}\right)^5 + \left(3 - \sqrt{5}\right)^5}{32} = \frac{\left(1968 + 880\sqrt{5}\right) + \left(1968 - 880\sqrt{5}\right)}{32} =$$

$$= \frac{1968 + 1968}{32} = \frac{3936}{32} = 123$$