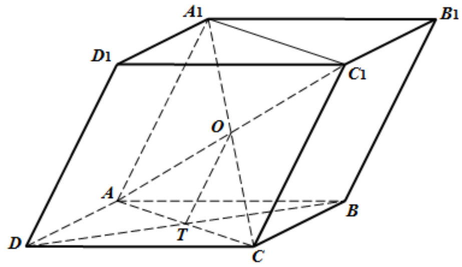
**2.** Диагонали параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются в точке $O$, $T = AC \cap BD$. Докажите, что $OT \parallel CC_1$.




Боковые грани параллелепипеда равны и параллельны: $AA_1 = CC_1 \cap AA_1 \parallel CC_1 \Rightarrow AA_1C_1C$ – параллелограмм и его диагонали $AC_1$ и $A_1C$ в точке пересечения $O$ делятся пополам: $AO = OC_1$.

Основание $ABCD$ – тоже параллелограмм, и его диагонали $AC$ и $BD$ в точке пересечения $T$ тоже делятся пополам: $AT = TC$. $OT$ – средняя линия треугольника $AC_1C$, и поэтому $OT \parallel CC_1$.

**.** На рисунке 135, *б* изображена четырехугольная пирамида $SABCD$. Точка $K$ лежит на ребре $SD$, а точка $M$ — на ребре $BC$. Постройте точку пересечения прямой $l$ с плоскостью $BSC$, если эта прямая проходит через точку $K$ и параллельна прямой $MD$.

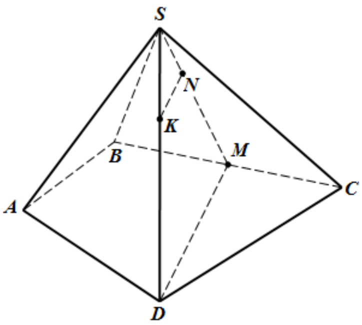
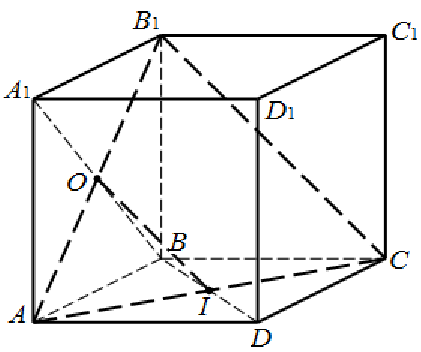



**Рис. 135б**

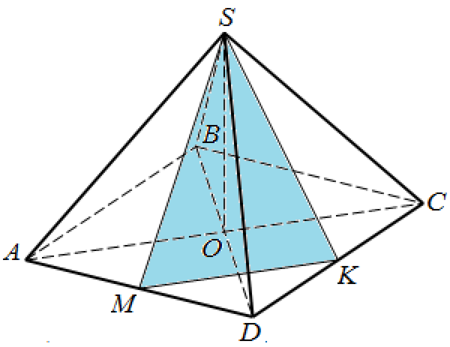
Точки $S$ и $M$ лежат в плоскости $SDM$, значит, и прямая $SM$ лежит в этой плоскости. Но точки $S$ и $M$ лежат и в плоскости $BSC$, т.е. $SM$ – линия пересечения плоскостей $SDM$ и $BSC$. Т.к. точка $K$ принадлежит плоскости $SDM$, то и проходящая через эту точку прямая $l$, параллельная прямой $DM$, лежит в плоскости $SDM$ и пересекает плоскость $BSC$ в точке $N$, лежащей на прямой $SM$.

**.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, точка $O$ — точка пересечения диагоналей грани $AA_1B_1B$. Прямая $l$ проходит через точку $O$ и параллельна прямой $B_1C$. Вычислите площадь поверхности куба, если длина отрезка прямой $l$, расположенного внутри куба, равна 2 см.




Диагонали грани $AA_1B_1B$ в точке пересечения $O$ делятся пополам, поэтому $AO = OB_1$. $OI$ – отрезок прямой $l$, параллельной прямой $B_1C$ и находящийся внутри куба. Т.к. этот отрезок проходит через середину стороны $AB_1$ треугольника $AB_1C$, то это средняя линия треугольника $AB_1C$. $OI = 2$ см $\Rightarrow B_1C = 4$ см. Как известно, площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали, поэтому площадь грани $BB_1C_1C$ $S_{BB_1C_1C} = \frac{B_1C^2}{2} = \frac{4^2}{2} = 8$ см$^2$. А т.к. у куба 6 граней, то площадь поверхности куба $S = 8 \cdot 6 = 48$ см$^2$.

. SABCD — четырехугольная пирамида, длина каждого ребра которой равна 2 см. Точка K — середина ребра DC пирамиды. Постройте сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через прямую SK и параллельна прямой AC. Вычислите периметр этого сечения.




Боковые стороны пирамиды – правильные треугольники со стороной 2 см. *O* – проекция вершины пирамиды *S* на плоскость основания. Т.к. все боковые рёбра пирамиды равны, то равны и их проекции: $AO = BO = CO = DO \Rightarrow AC = BD$, и т.к. $AB = BC = CD = AD = 2$ см, то $ABCD$ – квадрат.

Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через *SK* параллельно *AC*. Т.к. сечение параллельно прямой *AC*, лежащей в основании пирамиды, то оно пересекает основание по прямой *KM*, параллельной *AC* ($M \in AD$). Точки *S* и *M* принадлежат сечению, значит, прямая *SM* принадлежит сечению, т.е. сечение – это треугольник *KSM*. Т.к. *K* – середина *CD*, то *KM* – средняя линия треугольника *ACD*, и поэтому $KM = \frac{1}{2}AC$, а *M* – середина *AD*.

$$AC = AD\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ см} \Rightarrow KM = \sqrt{2} \text{ см}.$$

*SK* и *SM* – медианы, а значит и высоты правильных треугольников *CSD* и *ASD*, и поэтому $SM = SK = \frac{CD\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ см.

Периметр сечения *KSM*: $P_{KSM} = SK + SM + KM = 2\sqrt{3} + \sqrt{2}$ см.