

Исследуем функцию, заданную формулой: $y(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$

Область определения: $x < 0; x > 0$

Данная функция определена для:

$$x \neq 0$$

Ответ: $x < 0; x > 0$.

Первая производная: $y'(x) = \frac{3x^4 - 3}{x^4}$

$$\left(\frac{3x^4 + 1}{x^3} \right)' =$$

Воспользуемся формулой производной частного.

$$= \frac{(3x^4 + 1)' x^3 - (3x^4 + 1)(x^3)'}{(x^3)^2} =$$

Воспользуемся свойством степеней.

$$= \frac{(3x^4 + 1)' x^3 - (3x^4 + 1)(x^3)'}{x^6} =$$

$$= \frac{(12x^3) x^3 - (3x^4 + 1)(x^3)'}{x^6} =$$

$$= \frac{(12x^3) x^3 - (3x^4 + 1)(3x^2)}{x^6} =$$

Раскрываем скобки.

$$= \frac{12x^3 x^3 - (3x^4 + 1)3x^2}{x^6} =$$

Выносим общий множитель.

$$= \frac{x^2(12x^3 - (3x^4 + 1)3)}{x^6} =$$

$$= \frac{x^2(3x^4 - 3)}{x^6} =$$

Воспользуемся свойством степеней.

$$= \frac{3x^4 - 3}{x^4}$$

Вторая производная: $y''(x) = \frac{12}{x^5}$

Вторая производная это производная от первой производной.

$$\left(\frac{3x^4 - 3}{x^4} \right)' =$$

Воспользуемся формулой производной частного.

$$= \frac{(3x^4 - 3)' x^4 - (3x^4 - 3)(x^4)'}{(x^4)^2} =$$

Воспользуемся свойством степеней.

$$= \frac{(3x^4 - 3)' x^4 - (3x^4 - 3)(x^4)'}{x^8} =$$

$$= \frac{(12x^3) x^4 - (3x^4 - 3)(4x^3)}{x^8} =$$

$$= \frac{(12x^3) x^4 - (3x^4 - 3)(4x^3)}{x^8} =$$

Раскрываем скобки.

$$= \frac{12x^3 x^4 - (3x^4 - 3)4x^3}{x^8} =$$

Выносим общий множитель.

$$= \frac{x^3(12x^4 - (3x^4 - 3)4)}{x^8} =$$

$$= \frac{x^3 12}{x^8} =$$

Воспользуемся свойством степеней.

$$= \frac{12}{x^5} =$$

$$= \frac{12}{x^5}$$

Точки пересечения с осью x : нет

Для нахождения точек пересечения с осью абсцисс приравняем функцию к нулю.

$$\frac{3x^4 + 1}{x^3} = 0$$

Дробь обращается в нуль тогда, когда числитель равен нулю.

$$3x^4 + 1 = 0$$

Перенесем известные величины в правую часть уравнения.

$$3x^4 = -1$$

Разделим левую и правую часть уравнения на коэффициент при неизвестном.

$$x^4 = (-1):3$$

$$x^4 = -\frac{1}{3}$$

Ответ: нет решений.

Точки пересечения с осью y : нет

Вертикальные асимптоты: $x=0$

Определим значения аргумента, при которых знаменатель функции обращается в ноль

$$x=0$$

Горизонтальные асимптоты: нет .

Наклонные асимптоты: $y=3x$.

Для нахождения наклонных асимптот преобразуем исходное выражение.

$$\frac{3x^4+1}{x^3} =$$

$$=3x+\frac{1}{x^3}$$

Предел разности исходной функции и функции $3x$ на бесконечности равен нулю.

Критические точки: $x=-1;x=1$

Для нахождения критических точек приравняем первую производную к нулю и решим полученное уравнение.

$$\frac{3x^4-3}{x^4}=0$$

Дробь обращается в нуль тогда, когда числитель равен нулю.

$$3x^4-3=0$$

Перенесем известные величины в правую часть уравнения.

$$3x^4=3$$

Разделим левую и правую часть уравнения на коэффициент при неизвестном.

$$x^4 = 3:3$$

$$x^4 = 1$$

Ответ: $x = -1; x = 1$.

Возможные точки перегиба: нет

Для нахождения возможных точек перегиба приравняем вторую производную к нулю и решим полученное уравнение.

$$\frac{12}{x^5} = 0$$

Ответ: нет решений.

Точки разрыва: $x = 0$

Симметрия относительно оси ординат: нет

Функция $f(x)$ называется четной, если $f(-x) = f(x)$.

$$y(x) - y(-x) =$$

$$= \frac{3x^4 + 1}{x^3} - \frac{3(-x)^4 + 1}{(-x)^3} =$$

Выносим знак минус из произведения.

$$= \frac{3x^4 + 1}{x^3} + \frac{3x^4 + 1}{x^3} =$$

Приводим подобные члены.

$$= \frac{2(3x^4 + 1)}{x^3}$$

$$\frac{2(3x^4 + 1)}{x^3} \neq 0$$

$$y(-x) \neq y(x)$$

Симметрия относительно начала координат: функция нечетная, график симметричен относительно начала координат.

Функция $f(x)$ называется нечетной, если $f(-x)=-f(x)$.

$$y(x)+y(-x) =$$

$$= \frac{3x^4+1}{x^3} + \frac{3(-x)^4+1}{(-x)^3} =$$

Выносим знак минус из произведения.

$$= \frac{3x^4+1}{x^3} - \frac{3x^4+1}{x^3} =$$

$$= \frac{3x^4+1}{x^3} - \frac{3x^4+1}{x^3} =$$

Производим сокращение.

$$=0$$

$$y(-x)=-y(x)$$

Относительные экстремумы:

Проходя через точку минимума, производная функции меняет знак с (-) на (+).

Относительный минимум (1;4) .

Проходя через точку максимума. производная функции меняет знак с (+) на (-).

Относительный максимум (-1;-4) .

Множество значений функции: $y \leq -4; y \geq 4$

Наименьшее значение: нет

Наибольшее значение: нет