

Лекция 4. Криволинейные координаты

1. Криволинейные координаты. В ряде случаев, определяемых симметрией задачи, удобно перейти к **криволинейным координатам** q^1, q^2, q^3 , которые в механике называются **обобщёнными**. Декартовы координаты связаны с криволинейными координатами следующим соотношением:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q^1, q^2, q^3) = x(q^1, q^2, q^3)\mathbf{i} + y(q^1, q^2, q^3)\mathbf{j} + z(q^1, q^2, q^3)\mathbf{k} \quad (75)$$

или $x^\alpha = x^\alpha(q^\beta)$. Будем считать, что эти функции непрерывно дифференцируемы определенное количество раз (гладкое отображение) и взаимно-однозначны. Если при этом обратное отображение тоже гладко, то (75) называется **диффеоморфизмом**. Из (75) следуют равенства

$$q^\mu = q^\mu(x^\alpha). \quad (76)$$

Если мы приравняем какую-либо координату q^α постоянной величине C_α , то получим уравнение поверхности, которая называется **координатной поверхностью**, соответствующей этой координате $q^\alpha = C_\alpha$. Пересечение двух координатных поверхностей даёт **координатную линию**, вдоль которой изменяется только одна координата. Пересечение же трёх координатных поверхностей даёт точку P , положение которой мы и определяем (рис. 9). Ввиду дифференцируемости функций (75) можно ввести производные

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}, \quad (77)$$

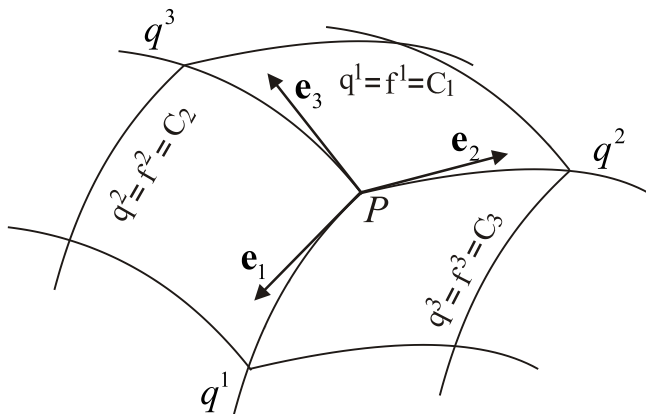


Рис. 9. Локальный базис. которые образуют векторы, называемые **векторами локального базиса (репера)** $\langle P, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Эти векторы направлены по касательным к координатным линиям в точке P . В отличие от орт декартовой системы координат, векторы $\mathbf{e}_\alpha$ меняются при переходе от одной точки к другой (отсюда и название локальный базис). Векторы $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{i}_\alpha$ ($\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}, \mathbf{i}_2 = \mathbf{j}, \mathbf{i}_3 = \mathbf{k}$) связаны друг с другом посредством якобиевых матриц A_α^β :

$$\mathbf{e}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial q^\alpha} \mathbf{i}_\beta = A_\alpha^\beta \mathbf{i}_\beta. \quad (78)$$

Здесь мы учли, что $\mathbf{r} = x^\alpha \mathbf{i}_\alpha$ и базисные векторы $\mathbf{i}_\alpha$ декартовой системы координат постоянны. Ввиду взаимной однозначности преобразования координат $\det(A_\alpha^\beta) \neq 0$. Тогда существует обратная якобиева матрица, которую обозначим $\bar{A}_\alpha^\mu$:

$$\bar{A}_\alpha^\mu = \frac{\partial q^\mu}{\partial x^\alpha} : \bar{A}_\alpha^\mu A_\beta^\alpha = \delta_\beta^\mu. \quad (79)$$

2. Коэффициенты Ламэ. Векторы $\mathbf{e}_\alpha$ в общем случае имеют отличную от единицы длину. В физике в основном используются орты единичной длины, составляющие ортонормированный базис. Единичные орты определяются следующим выражением

$$\mathbf{e}_\alpha^* = \frac{1}{H_\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}, \quad (80)$$

где $H_\alpha = |\mathbf{e}_\alpha| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \right|$ – коэффициенты Ламэ. Следует отметить, что коэффициенты Ламэ имеет смысл вводить только в ортогональных системах координат, в которых метрический тензор имеет диагональный вид.

Задание 14. Убедитесь в том, что в ортогональных системах координат метрический тензор диагональный.

Диагональные компоненты при этом равны квадратам соответствующих коэффициентов Ламэ. Покажем это. Метрический тензор в криволинейной системе координат имеет вид

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial q^\beta} \mathbf{i}_\mu \mathbf{i}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial q^\beta} \delta_{\mu\nu}. \quad (81)$$

Здесь $\delta_{\mu\nu}$ – метрический тензор в декартовой системе координат (см. формулу (43)). Фактически мы получили закон преобразования компонент тензора второго ранга. Если векторы локального базиса взаимно ортогональны, то

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = H_\alpha H_\beta \mathbf{e}_\alpha^* \mathbf{e}_\beta^* = H_\alpha H_\beta \delta_{\alpha\beta} = H_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} \quad (82)$$

Здесь суммирование по α нет. Итак, мы показали, что метрический тензор в ортогональной системе координат имеет вид:

$$G = (g_{\alpha\beta}) = (H_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} H_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & H_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & H_3^2 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

Примерами криволинейных систем координат являются цилиндрическая и сферическая системы координат, рассмотренные нами ранее.

Т.к. согласно (46)

$$\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (84)$$

и нормированные векторы основного базиса равны (см. формулу (80))

$$\mathbf{e}_\alpha^* = \mathbf{e}_\alpha / \sqrt{g_{\alpha\alpha}}, \quad (85)$$

то нормированные векторы взаимного базиса имеют вид:

$$\mathbf{e}^{*\beta} = \mathbf{e}^\beta \sqrt{g_{\beta\beta}}. \quad (86)$$

В качестве примера найдем выражение для метрического тензора и коэффициентов Ламэ в цилиндрической системе координат (см. рис. 4).

Цилиндрические координаты

$$q^1 = \rho, \quad q^2 = \varphi, \quad q^3 = z \quad (87)$$

связаны с декартовыми координатами следующим образом (формулы (11)):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (88)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\rho &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = \mathbf{i}_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial \rho} = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi, \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \mathbf{i}_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial \varphi} = -\mathbf{i}_1 \rho \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \rho \cos \varphi, \\ \mathbf{e}_z &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \mathbf{i}_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial z} = \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (89)$$

Координатные линии и поверхности показаны на рис.10.

Поверхностями являются круговой цилиндр

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскости

$z = z, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}$. Легко

убедиться, что $\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = g_{\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta}$.

Это значит, что

цилиндрическая система

координат – ортогональная. В

самом деле, проводя прямые

вычисления, найдем:

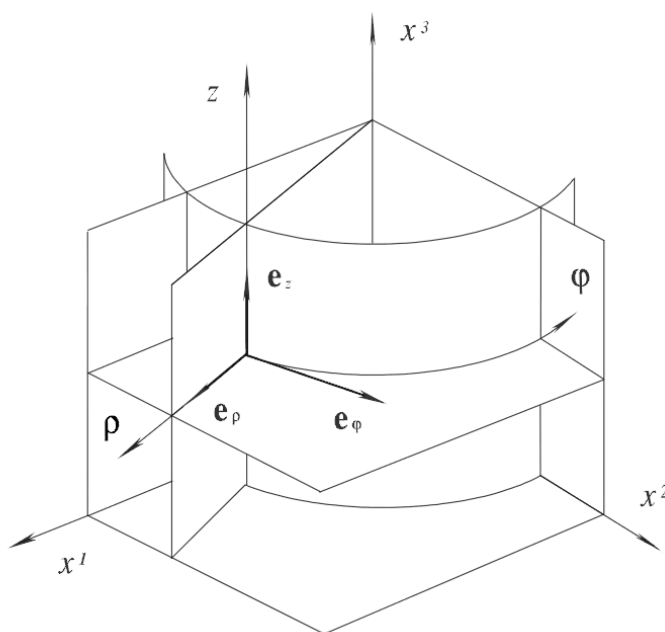


Рис. 10. Цилиндрическая система координат $x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\varphi &= (\mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi)(-\mathbf{i}_1 \rho \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \rho \cos \varphi) = -\rho \cos \varphi \sin \varphi + \rho \cos \varphi \sin \varphi = 0, \\
\mathbf{e}_z \mathbf{e}_z &= \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 = 1, \\
\mathbf{e}_z \mathbf{e}_\varphi &= (-\mathbf{i}_1 \rho \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \rho \cos \varphi) \mathbf{i}_3 = 0, \\
\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_z &= (\mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi) \mathbf{i}_3 = 0, \\
\mathbf{e}_\rho \mathbf{e}_\rho &= (\mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi)(\mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi) = 1, \\
\mathbf{e}_\varphi \mathbf{e}_\varphi &= (-\mathbf{i}_1 \rho \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \rho \cos \varphi)(-\mathbf{i}_1 \rho \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \rho \cos \varphi) = \rho^2.
\end{aligned}$$

Поэтому метрический тензор имеет вид:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (90)$$

Определитель метрического тензора $g = \det(g_{\alpha\beta}) = \rho^2$. Компоненты обратного тензора в случае ортогональных координат (тензор диагональный) $g^{\alpha\alpha} = 1/g_{\alpha\alpha}$. Ось Oz , для которой $\rho = 0$, представляет собой геометрическое место особых точек, в которых базис не определен. Поэтому векторы, заданные на оси Oz описывать с помощью цилиндрической системы координат нельзя. Коэффициенты Ламе определяются элементарно:

$$H_\rho = 1, H_\varphi = \rho, H_z = 1. \quad (91)$$

Задание 15. Найдите выражение для векторов взаимного базиса цилиндрической системы координат.

Задание 16. Для следующих криволинейных координат найти координатные линии и поверхности, выражения для векторов исходного и взаимного базисов, метрический тензор и коэффициенты Ламэ.

- Сферические координаты $q^1 = r$, $q^2 = \theta$, $q^3 = \varphi$, $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.
- Эллиптические координаты $q^1 = \lambda$, $q^2 = \mu$, $q^3 = z$, $1 \leq \lambda < \infty$, $-1 \leq \mu \leq 1$.

$$\begin{cases} x = c\lambda\mu, \\ y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \\ z = z. \end{cases}$$

с. Параболические координаты $q^1 = \lambda$, $q^2 = \mu$, $q^3 = \theta$, $0 \leq \lambda < \infty$, $0 \leq \mu < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$,

$$\begin{cases} x = \lambda\mu \cos \theta, \\ y = \lambda\mu \sin \theta, \\ z = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2). \end{cases}$$

d. Тородоидальные $q^1 = \alpha$, $q^2 = \beta$, $q^3 = \varphi$, $0 \leq \alpha < \infty$, $-\pi < \beta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

$$\begin{cases} x = c \frac{\operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \\ y = c \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \\ z = c \frac{\sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}. \end{cases}$$

е. Вытянутые сфероидальные координаты $q^1 = \lambda$, $q^2 = \mu$, $q^3 = \theta$, $1 \leq \lambda < \infty$, $-1 \leq \mu \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{cases} x = c\lambda\mu, \\ y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \cos \theta, \\ z = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)} \sin \theta. \end{cases}$$

f. Сплюснутые сфероидальные координаты $q^1 = \lambda$, $q^2 = \mu$, $q^3 = \theta$, $1 \leq \lambda < \infty$, $-1 \leq \mu \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\begin{cases} x = c\lambda\mu \sin \theta, \\ y = c\sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \\ z = c\lambda\mu \cos \theta. \end{cases}$$

3. Символы Кристоффеля. Найдем производные от базисных векторов криволинейной системы координат. Прежде всего, отметим, что

изменение вектора $d\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha(q + dq) - \mathbf{e}_\alpha(q)$ определяется разностью, которая в общем случае уже не является вектором, т.к. вычитаемые векторы взяты в разных точках q и $q + dq$. Чтобы в результате $d\mathbf{e}_\alpha$ стал вектором, необходимо вектор $\mathbf{e}_\alpha(q + dq)$ путем параллельного переноса (но в криволинейных координатах!) перенести в точку нахождения вектора $\mathbf{e}_\alpha(q)$. При таком переносе приращение $d\mathbf{e}_\alpha$ определяется с помощью коэффициентов связности пространства или символов Кристоффеля второго рода $\Gamma_{\alpha\mu}^\gamma$:

$$d\mathbf{e}_\alpha = \Gamma_{\alpha\mu}^\gamma \mathbf{e}_\gamma dq^\mu. \quad (92)$$

Итак, по определению *символы Кристоффеля второго рода* $\Gamma_{\mu\alpha}^\beta$ равны

$$\Gamma_{\alpha\mu}^\beta = \mathbf{e}^\beta \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\mu}. \quad (93)$$

Определим теперь *символы Кристоффеля первого рода* следующим образом:

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial q^\mu} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^\mu \partial q^\beta} = \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial \mathbf{e}_\mu}{\partial q^\beta} = \Gamma_{\alpha\mu\beta}. \quad (94)$$

Связь между символами Кристоффеля первого и второго родов осуществляется посредством метрического тензора:

$$\Gamma_{\alpha\mu}^\beta = \mathbf{e}^\beta \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\mu} = g^{\nu\beta} \mathbf{e}_\nu \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\mu} = g^{\nu\beta} \Gamma_{\nu\alpha\mu}. \quad (95)$$

Вспоминая определение метрического тензора (42), можно получить полезное при расчетах выражение для символа Кристоффеля первого рода:

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial q^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial q^\alpha} \right). \quad (96)$$

Пример. Символы Кристоффеля первого рода в цилиндрической системе координат вычисляем с использованием формул (95) и (90):

$$\Gamma_{\rho\rho\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\rho}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\rho\varphi}}{\partial \rho} - \frac{\partial g_{\rho\varphi}}{\partial \rho} \right) = 0,$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi\rho} = \Gamma_{\varphi\rho\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \rho} + \frac{\partial g_{\varphi\rho}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\rho}}{\partial \varphi} \right) = \rho,$$

.....

и так далее. Ненулевыми символами являются только $\Gamma_{\varphi\varphi\rho} = \Gamma_{\varphi\rho\varphi} = \rho$ и $\Gamma_{\rho\varphi\varphi} = -\rho$. Из символов Кристоффеля второго рода отличаются от нуля

$$\Gamma_{\varphi\rho}^{\varphi} = \Gamma_{\rho\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{\rho} \text{ и } \Gamma_{\varphi\varphi}^{\rho} = -\rho.$$

4. Элементы длины, объема и поверхности в криволинейных системах координат. Между определителем метрического тензора и якобианом существует простая связь. Найдем ее. Прежде всего, заметим, что выражение (81)

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial q^{\alpha}} \delta_{\mu\nu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial q^{\beta}} \quad (97)$$

в матричной форме можно записать в виде:

$$G = A^T E A. \quad (98)$$

Учитывая, что определитель произведения матриц равен произведению определителей сомножителей, имеем:

$$g = \det A^T \det E \det A.$$

Так как определитель единичной матрицы равен единице, а определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной, то

$$g = (\det A)^2.$$

Определитель якобиевой матрицы называют якобианом $J = \det A = \left| \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial q^{\beta}} \right|$.

Следовательно,

$$J = \sqrt{g}. \quad (99)$$

Расстояние между двумя бесконечно близкими точками выражается с помощью метрического тензора

$$ds^2 = d\mathbf{r}d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha} dq^\alpha \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\beta} dq^\beta = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta dq^\alpha dq^\beta = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta. \quad (100)$$

В любой точке пространства можно привести метрический тензор к диагональному виду. Это значит, что можно выбрать ортогональную систему координат. В таком случае

$$ds^2 = H_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = (H_1 dq^1)^2 + (H_2 dq^2)^2 + (H_3 dq^3)^2. \quad (101)$$

В такой форме квадрат длины в криволинейной системе координат определяется как в декартовой системе координат, с помощью теоремы Пифагора. Только в этом случае dx^α заменяется на элемент длины $dl_\alpha = H_\alpha dq^\alpha$. Обратим внимание, что в не зависимости от размерности обобщенной координаты q^α , элемент длины dl_α имеет размерность длины.

Элемент объема в этих координатах имеет вид

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{\det G} dq^1 dq^2 dq^3 \Rightarrow$$

$$dV = \sqrt{g} dq^1 dq^2 dq^3 = J dq^1 dq^2 dq^3. \quad (102)$$

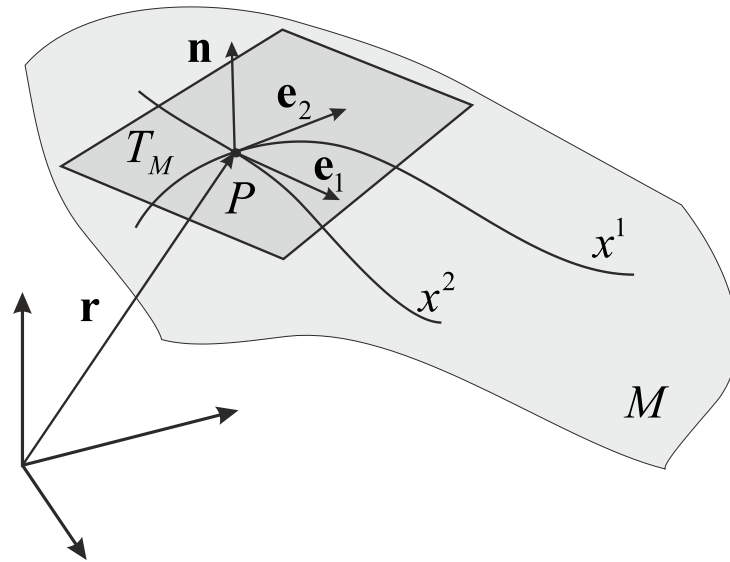


Рис. 11. Положение точки P на поверхности M . Векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ определяют локальный базис в касательной плоскости T_P – плоскости, касающейся поверхности в точке P .

Очевидно, что значение элемента объема не зависит от выбора системы координат. Следовательно, выражение (102) имеет место быть в любой допустимой системе координат.

Соотношение (102) имеет общий характер. Т.е. (102) справедливо при любой размерности. Например, рассмотрим метрику на двумерной поверхности, погружённую в трехмерное пространство, в котором определена евклидова метрика.

Зададим координаты на этой поверхности q^1 и q^2 (так называемые Гауссовы параметры). Тогда в некоторой точке P этой поверхности можно ввести векторы локального базиса

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2}.$$

Эти векторы лежат в касательной плоскости T_p . Вектор нормали к поверхности в точке P определяется векторным произведением базисных векторов

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|}. \quad (103)$$

В силу тождества Лагранжа (68)

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \right|^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^1} & \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tilde{g}_{11} & \tilde{g}_{12} \\ \tilde{g}_{21} & \tilde{g}_{22} \end{vmatrix} = \tilde{g}. \quad (104)$$

Здесь, конечно, $\tilde{g}$ – это определитель метрики на поверхности. Из (104) следует

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \sqrt{\tilde{g}} \mathbf{n}. \quad (105)$$

Поэтому вектор элемента площади поверхности

$$d\mathbf{S} = \mathbf{e}_1 dq^1 \times \mathbf{e}_2 dq^2 = \sqrt{\tilde{g}} \mathbf{n} dq^1 dq^2 \equiv \mathbf{n} dS. \quad (106)$$

Следовательно, элемент площади имеет вид

$$dS = \sqrt{\tilde{g}} dq^1 dq^2, \quad (107)$$

который формально аналогичен (102).

Задание 17. Для криволинейных координат из задания 16 найти элементы длины и объема, а также символы Кристоффеля.