Задача 2.

Скорость электрона составляет около 15% от скорости света, а поэтому решение имеет смысл проводить в релятивистской форме.

Далее решение ведётся в релятивистской форме физики Эйнштейна. Если вам тема СТО непонятна, просто пропускайте всё, за исключением **красного текста**, которым показано альтернативное (классическое) решение данной задачи с точки зрения механики Ньютона.

Второй закон Ньютона верен и в физике Эйнштейна, но только в формулировке импульса. Поэтому запишем второй закон Ньютона в корректной форме для импульса по вертикальной оси, учитывая, что вначале – вертикальный импульс равен нулю:

$$F = p'_y = (mv_y)' = \left(\frac{m_0 v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)' = m_0 \left(\frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)';$$

$$\frac{F}{m_0} = \frac{d}{dt} \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\frac{F}{m_0} dt = d \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\frac{F}{m_0} \Delta t = \Delta \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{поскольку } v_{y0} = 0, \text{ то:}$$

$$\frac{F}{m_0} t = \frac{v_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

$$\left(\frac{Ft}{m_0} \right)^2 \left(1 - \frac{v_x^2 + v_y^2}{c^2} \right) = v_y^2;$$

$$\left(\frac{Ft}{m_0} \right)^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2} \right) = v_y^2 + \left(\frac{Ft}{m_0 c} \right)^2 v_y^2;$$

$$v_y = \frac{Ft}{m_0} \sqrt{\frac{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c} \right)^2}};$$

$$\frac{Ft}{m_0 c} = \frac{Eel}{m_0 v_x c} = \frac{Uel}{m_0 v_0 c d} \approx \frac{400 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 5}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 40\,000\,000 \cdot 300\,000\,000} \approx \frac{8}{273} \approx \frac{1}{34};$$

$$\frac{v_0}{c} \approx \frac{40\,000\,000}{300\,000\,000} \approx \frac{2}{15};$$

Учитывая, что при малых α и β верно с точностью до α^2 и β^2 , что:

$$\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2};$$

$$\sqrt{1+\beta} \approx 1 + \frac{\beta}{2};$$

$$\frac{1}{1+\frac{\beta}{2}} \approx 1 - \frac{\beta}{2};$$

$$\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\beta}} \approx 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}, \quad \text{получим:}$$

$$v_y \approx \frac{Ft}{m_0} \left(1 - \frac{v_0^2}{2c^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{m_0 c} \right)^2 \right) \approx \frac{Ft}{m_0} \left(1 - \frac{2}{225} - \frac{1}{2312} \right) \approx \frac{Ft}{m_0} (1 - 0.0093) \approx \frac{Ft}{m_0} \left(1 - \frac{1}{107} \right);$$

Хотя можно и по-честному всё посчитать под корнями, тогда:

$$v_y = \frac{Ft}{m_0} \sqrt{\frac{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c} \right)^2}} \approx \frac{Ft}{m_0} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{2}{15} \right)^2}{1 + \left(\frac{8}{273} \right)^2}} \approx 0.9906 \frac{Ft}{m_0} \approx \left(1 - \frac{1}{107} \right) \frac{Ft}{m_0};$$

КЛАССИЧЕСКИЙ расчёт скорости по вертикали даст:

$$v_y \approx a_y t \approx \frac{Ft}{m};$$

Откуда видно, что ошибка классического подхода составляет около 1% (даёт завышенное значение вертикальной составляющей скорости) по отношению к релятивистскому, причём на меньших промежуточных скоростях движения эта ошибка чуть меньше, а поэтому при нахождении пройденного пути классическим методом мы получим ошибку не более 1%.

Найдём вертикальное смещение классическим способом:

$$h \approx \frac{a_y t^2}{2} \approx \frac{F}{2m} \left(\frac{l}{v_x} \right)^2 = \frac{Ee}{2m} \left(\frac{l}{v_0} \right)^2 = \frac{Ue}{2md} \left(\frac{l}{v_0} \right)^2;$$

$$h \approx \frac{Ue}{2md} \left(\frac{l}{v_0} \right)^2 \approx \frac{400 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 0.01} \left(\frac{0.05}{40\,000\,000} \right)^2 \approx \frac{1}{182} \text{ м} \approx 5.49 \text{ мм};$$

Найдём вертикальное смещение релятивистским способом:

$$v_y = \frac{Ft}{m_0} \sqrt{\frac{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}};$$

Обозначим: $\tau = \frac{Ft}{m_0 c}$, $t = \frac{m_0 c}{F} \tau$:

$$v_y = c\tau \sqrt{\frac{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}{1 + \tau^2}};$$

$$\begin{aligned} h &= \int_0^t v_y dt = \frac{m_0 c}{F} \int_0^t v_y d\tau = \frac{m_0 c}{F} \sqrt{c^2 - v_0^2} \int_0^\tau \frac{\tau d\tau}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \frac{m_0 c}{2F} \sqrt{c^2 - v_0^2} \int_0^\tau \frac{d\tau^2}{\sqrt{1 + \tau^2}} = \\ &= \frac{m_0 c}{2F} \sqrt{c^2 - v_0^2} \int_0^\tau (1 + \tau^2)^{-1/2} d(1 + \tau^2) = \frac{m_0 c \sqrt{c^2 - v_0^2}}{F} (1 + \tau^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_0^\tau ; \end{aligned}$$

$$h = \frac{m_0 c \sqrt{c^2 - v_0^2}}{F} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} - 1 \right);$$

Учитывая при малых α , что: $\sqrt{1 + \alpha} - 1 \approx \frac{\alpha}{2}$;

$$h \approx \frac{m_0 c \sqrt{c^2 - v_0^2}}{2F} \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2 = \frac{F}{m_0} \frac{t^2}{2} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} = \frac{F}{m_0} \frac{t^2}{2} \left(1 - \frac{1}{112}\right), \text{ что, как и раньше, даёт ошибку около 1\%.}$$

Вычислим точно:

$$h = ct \frac{m_0 c \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}{Ft} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} - 1 \right) = l \cdot \frac{c}{v_0} \cdot \frac{m_0 c}{Ft} \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} - 1 \right);$$

$$h = l \cdot \frac{m_0 c}{Ft} \sqrt{\left(\frac{c}{v_0}\right)^2 - 1} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} - 1 \right) \approx 0.05 \cdot \frac{273}{8} \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 1} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{8}{273}\right)^2} - 1 \right) \approx 5.44 \text{ мм};$$

Как легко видеть, ошибка-отклонение от классического расчёта действительно составляет всего 1%.

Найдём скорость электрона в момент вылета точным релятивистским способом.

как было показано выше:

$$v_y = \frac{Ft}{m_o} \sqrt{\frac{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}{1 + \left(\frac{Ft}{m_o c}\right)^2}} = c \sqrt{\frac{1 - \frac{v_o^2}{c^2}}{1 + \left(\frac{m_o c}{Ft}\right)^2}};$$

$$v_y^2 = \frac{c^2 - v_o^2}{1 + \left(\frac{m_o c}{Ft}\right)^2};$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_o^2 + v_y^2 = v_o^2 + \frac{c^2 - v_o^2}{1 + \left(\frac{m_o c}{Ft}\right)^2} = \frac{c^2 + v_o^2 \left(\frac{m_o c}{Ft}\right)^2}{1 + \left(\frac{m_o c}{Ft}\right)^2} = \frac{v_o^2 + c^2 \left(\frac{Ft}{m_o c}\right)^2}{1 + \left(\frac{Ft}{m_o c}\right)^2};$$

$$v = \sqrt{\frac{v_o^2 + \left(\frac{Ft}{m_o}\right)^2}{1 + \left(\frac{Ft}{m_o c}\right)^2}};$$

$$\frac{Ft}{m_o c} = \frac{Uel}{m_o v_o cd} \approx \frac{8}{273} \approx \frac{1}{34} < 1;$$

$$v = \sqrt{\frac{v_o^2 + \left(\frac{Ft}{m_o}\right)^2}{1 + \left(\frac{Ft}{m_o c}\right)^2}} \approx \sqrt{v_o^2 + \left(\frac{Ft}{m_o}\right)^2} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{Ft}{m_o c}\right)^2\right) \approx \sqrt{v_o^2 + \left(\frac{Ft}{m_o}\right)^2} \left(1 - \frac{1}{34^2 \cdot 2}\right) \approx \left(1 - \frac{1}{2300}\right) \sqrt{v_o^2 + \left(\frac{Ft}{m_o}\right)^2};$$

откуда легко видеть, что ошибка-отклонение от классического способа в расчёте модуля полной конечной скорости составляет около 0.05%, поскольку:

КЛАССИЧЕСКИЙ расчёт скорости даёт:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_o^2 + (a_y t)^2} = \sqrt{v_o^2 + \left(\frac{F}{m} t\right)^2}; \quad \frac{v_o}{c} \approx \frac{2}{15};$$

$$v = \sqrt{v_o^2 + \left(\frac{F}{m} t\right)^2} = c \sqrt{\left(\frac{v_o}{c}\right)^2 + \left(\frac{Ft}{m_o c}\right)^2} \approx 300\,000\,000 \sqrt{\left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{8}{273}\right)^2} \approx 40\,955 \frac{\text{км}}{\text{с}};$$

угол наклона вылетающего из конденсатора электрона можно найти как:

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{F}{m} t}{v_o} = \frac{Ft}{m_o c} : \frac{v_o}{c} \approx \frac{8}{273} : \frac{2}{15} \approx \frac{20}{91};$$

$$\alpha \approx \operatorname{arctg} \frac{20}{91} \approx 12.4^\circ;$$

Строгий подсчёт угла наклона в СТО даст:

$$v_y = \frac{\sqrt{c^2 - v_0^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{v_0}\right)^2 - 1}}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2 + 1}};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{v_0}\right)^2 - 1}}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2 + 1}} \approx \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 1}}{\sqrt{\left(\frac{273}{8}\right)^2 + 1}} \approx 12.3^\circ;$$

В итоге мы получили выражения:

$$\frac{Ft}{m_0 c} = \frac{Uel}{m_0 v_0 c d} \approx \frac{8}{273}; \quad \frac{v_0}{c} \approx \frac{2}{15};$$

через которые вычисляются все искомые величины:

$$h \approx \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{l}{2} \cdot \frac{Ft}{m_0 c} \cdot \frac{c}{v_0} \approx \frac{l}{2} \cdot \frac{8}{273} \cdot \frac{15}{2} = \frac{500}{91} \text{ мм} \approx 5.49 \text{ мм};$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{F}{m} t\right)^2} = c \sqrt{\left(\frac{v_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} \approx 40\,955 \frac{\text{км}}{\text{с}};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{Ft}{m_0 c} : \frac{v_0}{c}\right) \approx \operatorname{arctg} \left(\frac{8}{273} : \frac{2}{15}\right) \approx \operatorname{arctg} \frac{20}{91} \approx 12.4^\circ;$$

$$h = l \cdot \frac{m_0 c}{Ft} \sqrt{\left(\frac{c}{v_0}\right)^2 - 1} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} - 1\right) \approx 5.44 \text{ мм};$$

$$v = \frac{\sqrt{v_0^2 + \left(\frac{Ft}{m}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} = c \frac{\sqrt{\frac{v_0^2}{c^2} + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} \approx 40\,937 \frac{\text{км}}{\text{с}};$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{v_0}\right)^2 - 1}}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2 + 1}} \approx \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 1}}{\sqrt{\left(\frac{273}{8}\right)^2 + 1}} \approx 12.3^\circ ;$$

Заметим, что смещение составляет менее сантиметра, что приемлемо при заданной ширине конденсатора. Ошибки в 1%, проявляющиеся в данном опыте при обчёте его с классической и релятивистской точки зрения, надо полагать, вполне допустимы в пределах учебной задачи, хотя подобные ошибки приводят в неистовство астрономов и меломанов.

При этом, если бы v_0 составляла бы 160 000 км/с (вместо 40 000), то результаты отличались бы куда более значительно. Вышло бы, что:

$$\frac{Ft}{m_0 c} = \frac{Uel}{m_0 v_0 c d} \approx \frac{2}{273} ; \quad \frac{v_0}{c} \approx \frac{8}{15} ;$$

$$h_{160} \approx \frac{F}{m} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{l}{2} \cdot \frac{Ft}{m_0 c} \cdot \frac{c}{v_0} \approx \frac{l}{2} \cdot \frac{2}{273} \cdot \frac{15}{8} = \frac{125}{364} \text{ мм} \approx 343 \text{ мкм (по Ньютону)} ;$$

$$h_{160} = l \cdot \frac{m_0 c}{Ft} \sqrt{\left(\frac{c}{v_0}\right)^2 - 1} \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} - 1 \right) \approx 290 \text{ мкм (по Эйнштейну)} ;$$

$$v_{160} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{F}{m} t\right)^2} = c \sqrt{\left(\frac{v_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2} \approx 160\,015 \frac{\text{км}}{\text{с}} \text{ (по Ньютону)} ;$$

$$v_{160} = \frac{\sqrt{v_0^2 + \left(\frac{Ft}{m_0}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} = c \frac{\sqrt{\frac{v_0^2}{c^2} + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Ft}{m_0 c}\right)^2}} \approx 160\,011 \frac{\text{км}}{\text{с}} \text{ (по Эйнштейну)} ;$$

$$\alpha_{160} = \operatorname{arctg} \left(\frac{Ft}{m_0 c} : \frac{v_0}{c} \right) \approx \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{273} : \frac{8}{15} \right) \approx \operatorname{arctg} \frac{5}{364} \approx 47' \text{ (по Ньютону)} ;$$

$$\alpha_{160} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{v_0}\right)^2 - 1}}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{Ft}\right)^2 + 1}} \approx \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2 - 1}}{\sqrt{\left(\frac{273}{2}\right)^2 + 1}} \approx 40' \text{ (по Эйнштейну)} .$$