

1. Точка  $A(5; -4)$  не должна лежать на диагонали  $BD$ :  $x - 7y - 8 = 0$ . Это действительно так:  $5 - 7 \cdot (-4) - 8 = 25 \neq 0$ .

2. Находим уравнение диагонали  $AC$ .

*Первый способ.* Переходим к явному уравнению прямой  $BD$ :

$x - 7y - 8 = 0 \Leftrightarrow 7y = x - 8 \Leftrightarrow y = \frac{1}{7}x - \frac{8}{7}$ . Угловым коэффициентом этой прямой

$k_1 = \frac{1}{7}$ . Пусть  $k_2$  – угловым коэффициентом диагонали  $AC$ . Угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых связаны отношением  $k_1 \cdot k_2 = -1$ .

В нашем случае  $\frac{1}{7}k_2 = -1 \Leftrightarrow k_2 = -7$ . Уравнение  $AC$  находим как уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом  $y - y_1 = k(x - x_1)$ , где  $k = k_2 = -7$ ,  $x_1 = 5$ ,  $y_1 = -4$ :

$$y + 4 = -7(x - 5) \Leftrightarrow y + 4 = -7x + 35 \Leftrightarrow 7x + y - 31 = 0.$$

*Второй способ (для тех, кто знаком с темой «Нормальные и направляющие векторы прямой»).*  $(A; B)$  – нормальный (перпендикулярный) вектор прямой  $Ax + By + C = 0$ . Поэтому вектор  $\vec{N} = (1; -7)$  перпендикулярен прямой  $BD$ , а т.к.  $AC \perp BD$  (диагонали квадрата), то  $\vec{N} \parallel AC$ , т.е.  $\vec{N}$  – направляющий вектор прямой  $AC$ . Уравнение прямой, проходящей через точку  $(x_1; y_1)$  в направлении вектора  $\vec{N}(l; m)$  имеет вид  $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$ . У нас  $l = 1$ ,  $m = -7$ . Для вершины квадрата  $A$   $x_1 = 5$ ,  $y_1 = -4$ .

Уравнение диагонали  $AC$ :  $\frac{x - 5}{1} = \frac{y + 4}{-7} \Leftrightarrow -7x + 35 = y + 4 \Leftrightarrow 7x + y - 31 = 0$ .

3. Находим координаты точки  $O$  пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ .

$$\begin{aligned} \begin{cases} 7x + y - 31 = 0 \\ x - 7y - 8 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 31 - 7x \\ x - 7(31 - 7x) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 31 - 7x \\ x - 217 + 49x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 31 - 7x \\ 50x = 225 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 31 - 7 \cdot 4,5 \\ x = 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,5 \\ y = -0,5 \end{cases} \end{aligned}$$

4. Находим координаты вершины  $C$ :

Диагонали квадрата в точке пересечения делятся пополам, поэтому

$$\frac{x_A + x_C}{2} = x_O \Leftrightarrow x_A + x_C = 2x_O \Leftrightarrow x_C = 2x_O - x_A \Leftrightarrow x_C = 2 \cdot 4,5 - 5 = 4.$$

Аналогично:  $y_C = 2y_O - y_A \Leftrightarrow y_C = -2 \cdot 0,5 + 4 = 3$ . Координаты вершины  $C(4; 3)$ .

5. Находим координаты вершин  $B$  и  $D$ . Точка пересечения диагоналей  $O$  – центр квадрата, поэтому  $OA = OB = OC = OD$ .

$$OA^2 = (x_A - x_O)^2 - (y_A - y_O)^2 = (5 - 4,5)^2 + (-4 + 0,5)^2 = 0,25 + 12,25 = 12,5.$$

$OB^2 = (x_B - x_O)^2 - (y_B - y_O)^2 = 12,5$ . Т.к. точка  $B$  лежит на прямой  $BD$

$y = \frac{1}{7}x - \frac{8}{7}$ , то  $y_B = \frac{1}{7}x_B - \frac{8}{7}$  и  $OB^2 = (x_B - 4,5)^2 + \left(\frac{1}{7}x_B - \frac{8}{7} + \frac{1}{2}\right)^2 = 12,5$ . Отсю-

$$\begin{aligned} \text{да: } x_B^2 - 9x_B + \frac{81}{4} + \left(\frac{1}{7}x_B - \frac{9}{14}\right)^2 &= \frac{25}{2} \Leftrightarrow \frac{4x_B^2 - 36x_B + 81}{4} + \frac{(2x_B - 9)^2}{196} = \frac{25}{2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 196x_B^2 - 36 \cdot 49x_B + 81 \cdot 49 + 4x_B^2 - 36x_B + 81 = 25 \cdot 98 \Leftrightarrow \\ &200x_B^2 - 1800x_B + 1600 = 0 \Leftrightarrow x_B^2 - 9x_B + 8 = 0. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения находим абсциссы сразу двух точек:  $x_B = 8$ ,  $x_D = 1$ .

Ординаты:  $y_B = \frac{8}{7} - \frac{8}{7} = 0$ ;  $y_D = \frac{1}{7} - \frac{8}{7} = -1$ . Таким образом,  $B(8; 0)$ ,  $D(1; -1)$ .

**6. Находим уравнения сторон квадрата  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$ .**

Имеем  $A(5; -4)$ ,  $B(8; 0)$ ,  $C(4; 3)$ ,  $D(1; -1)$ .

$$AB: \frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{x - x_B}{x_A - x_B}.$$

$$\frac{y - 0}{-4 - 0} = \frac{x - 8}{5 - 8} \Leftrightarrow \frac{y}{-4} = \frac{x - 8}{-3} \Leftrightarrow 3y = 4x - 32 \Leftrightarrow 4x - 3y - 32 = 0.$$

$$BC: \frac{y - y_B}{y_C - y_B} = \frac{x - x_B}{x_C - x_B}.$$

$$\frac{y - 0}{3 - 0} = \frac{x - 8}{4 - 8} \Leftrightarrow \frac{y}{3} = \frac{x - 8}{-4} \Leftrightarrow -4y = 3x - 24 \Leftrightarrow 3x + 4y - 24 = 0.$$

$$CD: \frac{y - y_C}{y_D - y_C} = \frac{x - x_C}{x_D - x_C}.$$

$$\frac{y - 3}{-1 - 3} = \frac{x - 4}{1 - 4} \Leftrightarrow \frac{y - 3}{-4} = \frac{x - 4}{-3} \Leftrightarrow 3y - 9 = 4x - 16 \Leftrightarrow 4x - 3y - 7 = 0.$$

$$AD: \frac{y - y_D}{y_A - y_D} = \frac{x - x_D}{x_A - x_D}.$$

$$\frac{y + 1}{-4 + 1} = \frac{x - 1}{5 - 1} \Leftrightarrow \frac{y + 1}{-3} = \frac{x - 1}{4} \Leftrightarrow 4y + 4 = -3x + 3 \Leftrightarrow 3x + 4y + 1 = 0.$$

