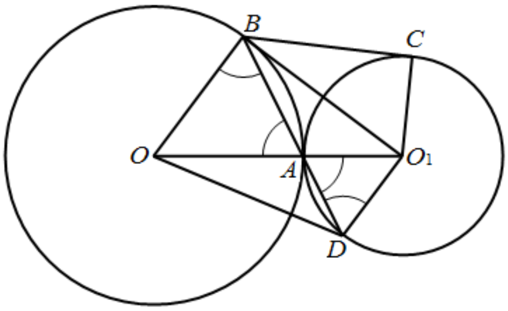
«Очень трудно найти в тёмной комнате чёрную кошку, особенно, если ее там нет.»

Конфуций.

Две окружности радиусов R и r ($R>r$) внешне касаются в точке A. Через точку B на большей окружности проведена прямая, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найдите BC если $AB=a$.



O и O_1 – центры окружностей радиусов R и r соответственно, A – точка касания этих окружностей, B – точка на окружности радиуса R, BC – касательная к окружности радиуса r. Из точки B, лежащей на окружности радиуса R к окружности радиуса r можно провести 2 касательных, но по теореме о касательных из одной точки, они равны. Поэтому ограничимся одной касательной BC. Продолжим отрезок BA до пересечения с окружностью радиуса r в точке D и рассмотрим треугольники OBA и O_1DA. Это равнобедренные треугольники: $OB=OA=R$, $O_1D=O_1A=r$, у которых $\angle BAO=\angle DAO_1$ как вертикальные, а это углы между основанием AB и боковой стороной OA (ΔOBA) и основанием AD и боковой стороной O_1A (ΔO_1DA), следовательно, $\Delta O_1DA \sim \Delta OBA$ по 2-му признаку подобия равнобедренных треугольников, и $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{OA_1}{OA}$ или $\dfrac{AD}{a}=\dfrac{r}{R} \Leftrightarrow AD=\dfrac{ar}{R}$. $BD=AB+AD=a+\dfrac{ar}{R}==\dfrac{a(R+r)}{R}$. По теореме о касательной и секущей

$BC^2=AB\cdot AD \Leftrightarrow BC^2=\dfrac{a^2(R+r)}{R} \Rightarrow BC=a\sqrt{\dfrac{R+r}{R}}$ (1). Вот и всё!

а) *На лишние линии AD и BO_1, как и на дуги, обозначающие углы OBA и ADO_1, не обращайте внимания! Это я собирался (сейчас смешно подумать) доказывать, что OBO_1D – трапеция с основаниями $OB=R$ и $DO_1=r$ и диагоналями $OO_1=R+r$ и $BD=\dfrac{a(R+r)}{R}$. По известным основаниям и диагоналям собирался найти боковые стороны трапеции* (*точнее, одну сторону BO_1*), *а затем из прямоугольного треугольника O_1BC по известной гипотенузе BO_1 и катету $O_1C=r$ через теорему Пифагора найти катет BC. А до этого (ещё смешнее) собирался решать эту задачу с помощью теоремы синусов!*

б) *Если точка B диаметрально противоположна точке A, то точки B, O, A, O_1, D лежат на одной прямой* (*рисунок сделайте сами*), *и ни о каких подобных треугольниках O_1DA и OBA речи быть не может. В этом случае ΔBCO_1 - это прямоугольный треугольник с гипотенузой $BO_1=2R+r$ и катетами BC и $O_1C=r$, и по теореме Пифагора $BC=\sqrt{(2R+r)^2-r^2}$ или $BC=\sqrt{4R^2+4Rr+r^2-r^2} \Leftrightarrow BC=2\sqrt{R(R+r)}$. Тем не менее, формула* (1) *работает и в этом случае, т.к. $AB=a-2R$. Подставляя в* (1) *вместо a* 2R, *получим*: $BC=2R\sqrt{R(R+r)}$.