

Ну, Вы, девушка, даёте! Этот сервис – «Школьные знания», а тут – без пяти минут второкурсница! Где учиться, если не секрет? И Вы, случайно, не Настя Рогожкина, у которой 18 мая – День Рождения, и даже – юбилей!

5. Составить уравнения прямых:

1) l_1 , проходящей через точки A и B ;

2) l_2 , проходящей через точку A параллельно вектору $\vec{a}$;

3) l_3 , проходящей через точку B перпендикулярно вектору $\vec{a}$.

Найти угол между прямыми l_1 и l_2 . Вычислить расстояние от точки A до прямой l_3 . Найти координаты точки пересечения прямых l_2 и l_3 . Сделать чертёж.

$$A(2, 4), B(4, -4), \vec{a} = (-4, 3).$$

1) Уравнение прямой, проходящей через две точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) имеет вид:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (1.1).$$

Полагая $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ (точка A) и $x_2 = 4$, $y_2 = -4$ (точка B), получим:

$$\frac{y - 4}{-4 - 4} = \frac{x - 2}{4 - 2} \Leftrightarrow \frac{y - 4}{-8} = \frac{x - 2}{2} \Leftrightarrow \frac{y - 4}{-4} = \frac{x - 2}{1} \quad (1.2).$$

Отсюда: $y - 4 = -4x + 8 \Leftrightarrow y = -4x + 12$ – это уравнение прямой AB с угловым коэффициентом. Из этого уравнения можно получить *общее уравнение прямой AB* , если перенести правую часть этого уравнения влево: $l_1: 4x + y - 12 = 0$.

2) Уравнение прямой, проходящей через точку (x_1, y_1) параллельно вектору $\vec{a} = (m, n)$ имеет вид: $\frac{y - y_1}{n} = \frac{x - x_1}{m}$ (2.1), вектор $\vec{a} = (m, n)$ называется *направляющим вектором* прямой (2.1). Как и в 1) $x_1 = 2$, $y_1 = 4$. $m = -4$, $n = 3$:

$$\frac{y - 4}{3} = \frac{x - 2}{-4} \quad (2.2).$$

Отсюда получим общее уравнение прямой (2.2):

$$-4y + 16 = 3x - 6 \Leftrightarrow l_2: 3x + 4y - 22 = 0 \quad (2.3).$$

3) Уравнение прямой, проходящей через точку (x_1, y_1) перпендикулярно вектору $\vec{a} = (A, B)$ имеет вид: $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ (3.1), вектор $\vec{a} = (A, B)$ называется *нормальным вектором* прямой (3.1). Здесь $x_1 = 4$, $y_1 = -4$. $A = -4$, $B = 3$:

$$-4(x - 4) + 3(y + 4) = 0 \quad (3.2).$$

Отсюда получим общее уравнение прямой (3.2):

$$-4x + 16 + 3y + 12 \Leftrightarrow l_3: 4x - 3y - 28 = 0 \quad (3.3).$$

4) Найдём угол α между прямыми $l_1: 4x + y - 12 = 0$ и $l_2: 3x + 4y - 22 = 0$.

Нормальные векторы этих прямых $\vec{N}_1 = (4, 1)$ и $\vec{N}_2 = (3, 4)$.

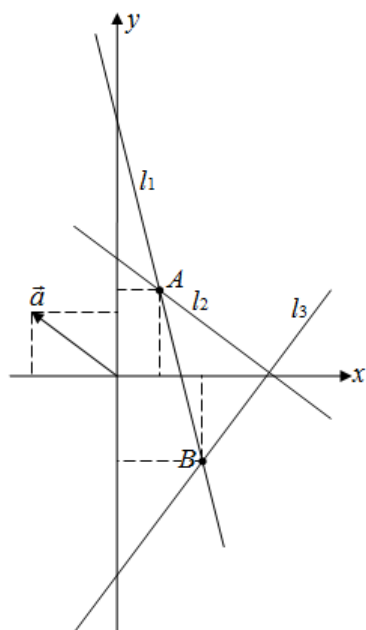
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2|}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{4 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{\sqrt{4^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{16}{5\sqrt{17}}; \alpha = \arccos\left(\frac{16}{5\sqrt{17}}\right).$$

5) Расстояние от точки $A(2, 4)$ до прямой $l_3: 4x - 3y + 28 = 0$.

$$d = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 28|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{24}{5} = 4,8.$$

Расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



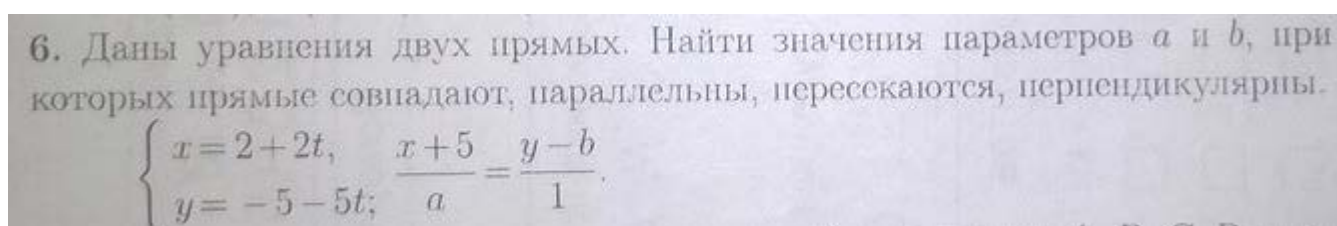
6) Найдём точку пересечения прямых

$$l_2: 3x + 4y - 22 = 0 \text{ и } l_3: 4x - 3y - 28 = 0.$$

$$\begin{cases} 3x + 4y - 22 = 0 \\ 4x - 3y - 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 22 \\ 4x - 3y = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 12y = 66 \\ 16x - 12y = 112 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow 25x = 178 \Rightarrow x = 7,12.$$

$$3 \cdot \frac{178}{25} + 4y = 22 \Leftrightarrow 4y = \frac{550}{25} - \frac{234}{25} \Leftrightarrow y = 0,16.$$

Сделаем чертёж. $A(2, 4)$ и $B(4, -4)$ – точки, через которые проходит прямая l_1 , $\vec{a}(-4, 3)$ – вектор, параллельно которому через точку A проходит прямая l_2 , и перпендикулярно которому через точку B проходит прямая l_3 .



Приведём оба уравнения к уравнениям прямых с угловым коэффициентом:

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -5 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{2} = t \\ \frac{y+5}{-5} = t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{-5} \Leftrightarrow -5x + 10 = 2y + 10 \Leftrightarrow 2y = -5x \Leftrightarrow y = \frac{5}{2}x;$$

$$\frac{x+5}{a} = \frac{y-b}{1} \Leftrightarrow x+5 = ay - ab \Leftrightarrow ay = x+5+ab \Leftrightarrow y = \frac{1}{a}x + \frac{ab+5}{a}.$$

а) Прямые совпадают, если $\begin{cases} \frac{5}{2} = \frac{1}{a} \\ \frac{ab+5}{a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,4 \\ 0,4b + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,4 \\ b = -12,5 \end{cases}.$

б) Прямые параллельны, если $a = 0,4$ и $b \neq -12,5$.

в) Прямые пересекаются, если $a \neq 0,4$, b – любое.

г) Прямые перпендикулярны, если $\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{a} = -1 \Leftrightarrow a = -2,5$ (b – любое).

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C . Вычислить расстояние от начала координат до плоскости.
 $A(1, -1, 3), B(5, 4, 1), C(-1, -3, 3).$

Уравнение прямой, проходящей через 3 заданные точки $(x_1, y_1, z_1); (x_2, y_2, z_2);$

(x_3, y_3, z_3) имеет вид: $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 5-1 & 4+1 & 1-3 \\ -1-1 & -3+1 & 3-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow (x-1) \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$(z-3) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4(1-x) + 4(y+1) + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4x + 4y + 4 + 2z - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x + 4y + 2z + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - z - 1 = 0$$

Уравнение плоскости, проходящей через точки A, B, C : $2x - 2y - z - 1 = 0.$

Расстояние от начала координат до этой плоскости:

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

8. Даны уравнение прямой l и координаты точки A . Составить:

1) уравнение плоскости π , проходящей через точку A перпендикулярно прямой l ,

2) уравнение прямой l' , проходящей через точку A параллельно прямой l ,

3) уравнение плоскости π' , проходящей через точку A и прямую l ,

4) каноническое уравнение линии пересечения плоскостей π и π' .

$$A(-5, -5, -4), l: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-5}{1}.$$

1) Направляющий вектор прямой l : $\vec{s} = (3, 4, 1)$ является нормальным вектором плоскости, перпендикулярной этой прямой.

Т.к. плоскость π проходит через точку $A(-5, -5, -4)$, то уравнение плоскости π :

$$3(x+5) + 4(y+5) + 1(z+4) \Leftrightarrow 3x + 15 + 4y + 20 + z + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + z + 39 = 0.$$

2) Направляющий вектор прямой l' равен направляющему вектору прямой l . Поэтому уравнение прямой l' :

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z+4}{1}.$$

3) Точка $B(2, 1, 5)$ принадлежит прямой l , значит, прямая, проходящая через точки A и B лежит в плоскости π' . За направляющий вектор прямой AB можно взять вектор $\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB} = (2+5, 1+5, 5+4) = (7, 6, 9)$. Векторное произведение векторов $\vec{s} = (3, 4, 1)$ и $\overrightarrow{AB} = (7, 6, 9)$ – вектор $\vec{N} = \vec{s} \times \overrightarrow{AB}$ – нормальный вектор плоскости π' :

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 1 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 30\vec{i} - 20\vec{j} - 10\vec{k}.$$

В качестве нормального вектора плоскости π' можно взять одну десятую вектора $\vec{N}$:

$\vec{n} = \frac{1}{10} \vec{N} = (3, -2, -1)$. Уравнение плоскости π' как уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}$, проходящей через точку A :

$$3(x+5) - 2(y+5) - (z+4) = 0 \Leftrightarrow 3x + 15 - 2y - 10 - z - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - z + 1 = 0.$$

4). Плоскость π : $3x + 4y + z + 39 = 0$; плоскость π' : $3x - 2y - z + 1 = 0$.

Направляющий вектор линии пересечения плоскостей π и π' перпендикулярен векторам $\vec{s} = (3, 4, 1)$ и $\vec{n} = (3, -2, -1)$. Поэтому в качестве такого вектора можно взять

$$\text{вектор } \vec{s}' = \vec{s} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 6\vec{j} - 18\vec{k} \text{ и даже мож-}$$

но взять вектор $(-1; 3; -9)$.

В качестве точки, через которую проходит искомая прямая, возьмём точку пересечения этой прямой с координатной плоскостью yOz . При этом координата $x_1 = 0$.

Подставив $x_1 = 0$ в уравнения плоскостей π и π' , получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4y + z + 39 = 0 \\ -2y - z + 1 = 0 \end{cases}. \text{ Складывая оба уравнения системы, получим: } 2y + 40 = 0. \text{ Отсюда } y = -20 \text{ и } z = 41.$$

Уравнение линии пересечения: $\frac{x}{-1} = \frac{y + 20}{3} = \frac{z - 41}{-9}.$