5 *(1 балл)* Используя формулы для дополнительных углов, упростите выражение и найдите его значение:

а) $\dfrac{\cos\left(4\pi+\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{4}\right)+\cos\left(\pi+\dfrac{\alpha}{4}\right)}$, если $\alpha=\pi$;

$$\frac{\cos\left(4\pi+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{4}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\alpha}{4}\right)}=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}}$$

1) Если $\alpha=\pi$, то при подстановке возникает неопределенность типа $0/0$:

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{0}{0}$$

2) Если $\alpha\neq\pi$, то

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}-sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha}{4}-\cos\frac{\alpha}{4}}=\frac{\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)}{-\left(\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}\right)}=\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}$$

Ответ: $\begin{cases}\cos\frac{\alpha}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}, & \alpha\neq\pi n\ (n\in Z)\\ \text{не определено}, & \alpha=\pi n\ (n\in Z)\end{cases}$

б) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)}{1+\sin(\pi+\alpha)}$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$.

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-ctg\ (\pi+\alpha)}{1+\sin(\pi+\alpha)}=\frac{\cos\alpha+ctg\ \alpha}{1-\sin\alpha}$$

Что делать дальше не знаю!

6 *(2 балла)* Докажите справедливость равенства $2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-4\alpha\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+4\alpha\right)=\cos 8\alpha$.

$$2\sin\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)=2\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\left(\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\right)-\cos\left(\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)+\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\right)\right)=$$
$$=\cos 8\alpha-\cos\frac{\pi}{2}=\cos 8\alpha-0=\cos 8\alpha$$

Что и требовалось доказать.

7 *(3 балла)* Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}$;

$$\frac{(\sin 9\alpha+\sin 7\alpha)-\sin 8\alpha}{(\cos 9\alpha+\cos 7\alpha)-\cos 8\alpha}=\frac{2\sin\frac{9\alpha+7\alpha}{2}\cos\frac{9\alpha-7\alpha}{2}-\sin 8\alpha}{2\cos\frac{9\alpha+7\alpha}{2}\cos\frac{9\alpha-7\alpha}{2}-\cos 8\alpha}=\frac{\sin 8\alpha\cos\alpha-\sin 8\alpha}{\cos 8\alpha\cos\alpha-\cos 8\alpha}=$$

$$=\frac{\sin 8\alpha\,(\cos\alpha-1)}{\cos 8\alpha\,(\cos\alpha-1)}$$

1) Если α не равно 2πn (n – целое число), то можно сократить

$$\frac{\sin 8\alpha\,(\cos\alpha-1)}{\cos 8\alpha\,(\cos\alpha-1)}=\frac{\sin 8\alpha}{\cos 8\alpha}=tg\ 8\alpha$$

2) Если α равно 2πn (n – целое число), то

$$\frac{\sin 7\alpha-\sin 8\alpha+\sin 9\alpha}{\cos 7\alpha-\cos 8\alpha+\cos 9\alpha}=\frac{\sin 14\pi n-\sin 16\pi n+\sin 18\pi n}{\cos 14\pi n-\cos 16\pi n+\cos 18\pi n}=\frac{0}{1-1+1}=0$$

Ответ: $\begin{cases} tg\ 8\alpha, & \alpha\neq 2\pi n\ (n\in Z)\\ 0, & \alpha=2\pi n\ (n\in Z)\end{cases}$

б) $\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{1+\dfrac{\sin 2\alpha}{2}}\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha).$

$$\frac{sin^3\alpha-cos^3\alpha}{1+\frac{\sin 2\alpha}{2}}\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)}{1+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2}}\cdot(\sin\alpha+\cos\alpha)=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(1+\sin\alpha\cos\alpha)}{1+\sin\alpha\cos\alpha}$$

$\sin\alpha\cos\alpha\neq-1$ ни при каком значени α, поэтому можно сократить

$$\frac{(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(1+\sin\alpha\cos\alpha)}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-cos\,2\alpha$$

Ответ: $-cos\,2\alpha$