4) $\left|x-\frac{1}{x}\right| \geq x-\frac{1}{x}$

Область определения: $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

По определению

$|a| = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \geq 0 \end{cases}$

Из него видно, что

$$\begin{cases} |a| > a, & a < 0 \\ |a| = a, & a \geq 0 \end{cases}$$

И при любом а будет выполняться неравенство

$$|a| \geq a$$

Полагая $a = x - \frac{1}{x}$, получим исходное выражение. Следовательно, неравенсто

$$\left|x - \frac{1}{x}\right| \geq x - \frac{1}{x}$$

будет выполняться на всей области определения.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

5) $\left|x-2-\frac{3}{x}\right| \leq \frac{x^2-2x-3}{x}$

Область определения: $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

По определению

$|a| = \begin{cases} -a, & a < 0 \\ a, & a \geq 0 \end{cases}$

Из него видно, что

$$\begin{cases} |a| > a, & a < 0 \\ |a| = a, & a \geq 0 \end{cases}$$

И при любом а будет выполняться неравенство

$$|a| \geq a$$

Т.е. модуль любого выражения всегда не меньше, чем само выражение.

Преобразуем данное выражение, выполнив деление на x в правой части.

$$\left|x - 2 - \frac{3}{x}\right| \leq x - 2 - \frac{3}{x}$$

Поскольку уже установлено, что модуль любого выражения всегда не меньше, чем само выражение, остается только один вариант

$$\left|x - 2 - \frac{3}{x}\right| = x - 2 - \frac{3}{x}$$

Это выполнимо лишь в случае, когда выражение под знаком модуля неотрицательное.

$$x - 2 - \frac{3}{x} \geq 0$$

Решаем уравнение

$$x-2-\frac{3}{x}=0$$

$$x^2-2x-3=0$$

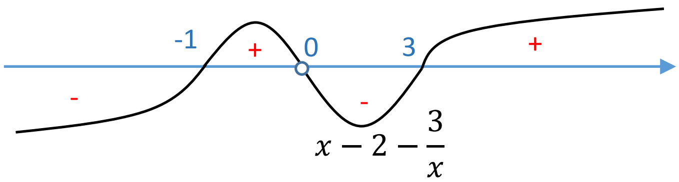
$$D=2^2-4(-3)=16$$

$$\sqrt{D}=4$$

$$x_1=\frac{2-4}{2}=-1$$

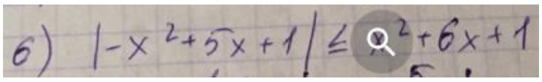
$$x_2=\frac{2+4}{2}=3$$

Определяем знаки интервалов



Выписываем в ответ неотрицательные интервалы

Ответ: $[-1;0)\cup[3;\infty)$



Область определения – вся числовая прямая.

Решим уравнение

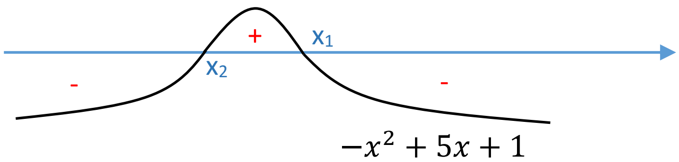
$$-x^2+5x+1=0$$

$$D=5^2-4(-1)=29$$

$$x_1=\frac{-5-\sqrt{29}}{-2}=\frac{5+\sqrt{29}}{2}\approx 5.2$$

$$x_2=\frac{5-\sqrt{29}}{2}\approx -0.19$$

Определяем знаки интервалов



Используя определения модуля рассматриваем два случая

1) $x\in\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{29}}{2}\right)\cup\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2};\infty\right)$

$$|-x^2+5x+1|=x^2-5x-1$$

Исходное выражение принимает вид

$$x^2-5x-1\le x^2+6x+1$$

$$11x\ge -2$$

$$x\ge -\frac{2}{11}\ (\approx -0{,}18)$$

С учетом рассматриваемой области, получаем ответ $x\in\left(\frac{5+\sqrt{29}}{2};\infty\right)$

2) $x\in\left[\frac{5-\sqrt{29}}{2};\frac{5+\sqrt{29}}{2}\right]$

$$|-x^2+5x+1|=-x^2+5x-1$$

Исходное выражение принимает вид

$$-x^2 + 5x + 1 \le x^2 + 6x + 1$$

$$2x^2 + x \ge 0$$

Решаем уравнение

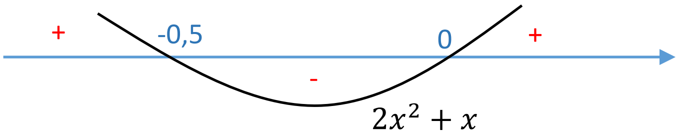
$$2x^2 + x = 0$$

$$x(2x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -0.5$$

Определяем знаки интервалов

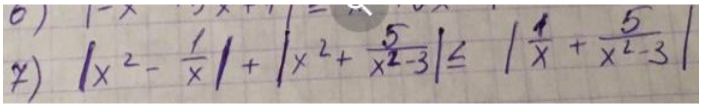


С учетом рассматриваемой области,

получаем ответ $x \in (0; \frac{5+\sqrt{29}}{2}]$

Выписываем окончательный ответ

Ответ: $[0; \infty)$



Находим точки, в которых знаменатели равны нулю

1) $x^2 - 3 = 0$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$$

2) $x_3 = 0$

Область определения

$$x \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; \infty\right)$$

Находим точки, в которых выражения под знаками модуля равны нулю

1)

$$x^2 - \frac{1}{x} = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

2)

$$x^2 + \frac{5}{x^2 - 3} = 0$$

$$x^4 - 3x^2 + 2 = 0$$

Решаем биквадратное уравнение

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 = 1$$

$$x^2 = \frac{3 - 1}{2} = 1; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1$$

или

$$x^2 = \frac{3+1}{2} = 2; \quad x_1 = -\sqrt{2}; \quad x_2 = \sqrt{2}$$

3)

$$\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2 - 3} = 0$$

$$x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$D = 5^2 - 4(-3) = 37$$

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2} \approx -5.54$$

$$x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2} \approx 0.54$$

Дальше делать не стал. Нужно нанести все точки, определить знаки интервалов и рассмотреть решение на каждом интервале. Это работы на два дня. Или в условии что-то не так, или я не вижу правильного решения.